1 – Conversión — $\vdash M = N$
2 – Reducción — $M \twoheadrightarrow N$
3 – Teorías — $\lambda, \lambda\eta, K, K^*$
4 – Modelos
5 –

Teorías

Def. $M ::= x \mid MM \mid \lambda x.M$

Congruencia

$$\frac{}{(\lambda x.M)N = M\{x/N\}}\ \beta \qquad \frac{M = M'}{MN = M'N}\ \mu \qquad \frac{N = N'}{MN = MN'}\ \nu \qquad \frac{M = M'}{\lambda x.M = \lambda x.M'}\ \xi$$

$$\frac{}{M = M}\ \mathrm{refl} \qquad \frac{M = N}{N = M}\ \mathrm{sym} \qquad \frac{M = N \quad N = P}{M = P}\ \mathrm{trans}$$

Def. Una "teoría" es un cjto. $\mathcal{T}$ de igualdades entre términos cerrados — $fv(M) = \emptyset$.

- $\mathcal{T}^+ = \{ M =_{\mathcal{T}} N \mid M, N \in \Lambda_0,\ \underbrace{(\lambda + \mathcal{T})}_{} \vdash M = N \}$ $\quad M \equiv N$

$\emptyset^+ = \lambda = \beta$

- Una λ-teoría es una teoría $\mathcal{T}$ tq. $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}$. CONSISTENTE $\quad (\mathcal{T}^{++} = \mathcal{T}^+)$

Lema. 1) Si $\mathcal{T} \vdash M = N$ entonces $\mathcal{T} \vdash C[M] = C[N]$.
$M =_{\mathcal{T}} N$

2) Si $\mathcal{T} \vdash M = M'$ y $\mathcal{T} \vdash N = N'$ entonces $\mathcal{T} \vdash M\{x/N\} = M'\{x/N'\}$.

Dem. 1) Por inducción en C: $\quad C ::= \square \mid CM \mid MC \mid \lambda x.C$

1.1) $C = \square$. $\quad \mathcal{T} \vdash M = N$ ✓

1.2) $C = C'P$. $\quad \mathcal{T} \vdash M = N \quad$ POR H.I. $\quad \mathcal{T} \vdash C'[M] = C'[N]$.

APLICANDO μ $\quad \mathcal{T} \vdash \underbrace{C'[M]P}_{\substack{\shortparallel \\ (C'P)[M]}} = \underbrace{C'[N]P}_{\substack{\shortparallel \\ (C'P)[N]}}$

1.3) $C = PC'$. (PARECIDO).

1.4) $C = \lambda x.C'$. (PARECIDO).

2)
$$\frac{}{M\{x/N\} = (\lambda x.M)N = (\lambda x.M')N = (\lambda x.M')N' = M'\{x/N'\}}.$$

PRINCIPIO DE EXTENSIONALIDAD.

- SELECTION SORT
  $\#$
- MERGESORT

"INTENSIONAL".

Lema. Son equivalentes, dadas dos teorías T_1, T_2:

1) $\forall M, N \in \Lambda$.

$$T_1 \vdash M = N \Leftrightarrow T_2 \vdash M = N.$$

2) $\forall M, N \in \Lambda_0$.

$$T_1 \vdash M = N \Leftrightarrow T_2 \vdash M = N.$$

$\Big\} \to T_1 = T_2.$

Dem. $1 \Rightarrow 2)$ ✓

$2 \Rightarrow 1)$ Si M, N son términos arbitrarios y $T_1 \vdash M = N$,

$$T_1 \vdash \underbrace{\lambda\vec{x}.M = \lambda\vec{x}.N}_{\in \Lambda_0}$$

$$\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\} = fv(M) \cup fv(N)$$

$$T_2 \vdash \lambda\vec{x}.M = \lambda\vec{x}.N$$

$$T_2 \vdash (\lambda\vec{x}.M)x_1 \dots x_n = (\lambda\vec{x}.N)x_1 \dots x_n \qquad (\text{por } \mu).$$

$$T_2 \vdash M = N \qquad (\text{por } \beta).$$

Lema $T + \eta = T + (I = 1)$

$$I = \lambda x.x \qquad 1 = \lambda x.\lambda y.xy$$

$$\frac{x \notin fv(M)}{\lambda x.Mx = M}\eta$$

$$[T_1 + T_2 = (T_1 \cup T_2)^+]$$

Dem.

"$\eta \Rightarrow (I = 1)$":

$$\lambda x.x = \lambda x.\lambda y.xy \quad ✓$$

"$(I = 1) \Rightarrow \eta$":

$$\lambda x.Mx \overset{\beta}{=} (\lambda y.\lambda x.yx)M = (\lambda x.x)M = M$$

(**Teorema**. Un término M es solvable sii $M =_\beta N$ N es una head normal form.
$N = \lambda x_1 \dots x_n \cdot y \, P_1 \dots P_k$)

Def. · Un término $M \in \Lambda_0$ se dice **solvable** si $\exists k . \exists N_1, \dots, N_k$. $M N_1 \dots N_k =_\beta I$.

· Un término $M \in \Lambda$ se dice solvable si $\lambda \vec{x} . M$ es solvable. $(\vec{x} = fv(M))$.

$\Omega = (\lambda x . x x)(\lambda x . x x)$ UNSOLVABLE.
M, N unsolvable, $BT(C[M]) = BT(C[N])$

Def. 1) $\mathcal{K}_0 = \{ M = N \mid M, N \in \Lambda_0 \quad M, N \text{ unsolvable} \}$.

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0^+$.

2) Una λ-teoría $\mathcal{T}$ es **sensata** (sensible) si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}$.

3) Una teoría $\mathcal{T}$ es **semi-sensata** si no iguala un término solvable y uno unsolvable.
(O sea, si $\mathcal{T} \vdash M = N$, o bien M, N ambos solvable o bien ambos unsolvable).

Lema. Si K^∞ es un punto fijo de K, es decir $\mathcal{T} \vdash K^\infty = K K^\infty$

$K = \lambda x . \lambda y . x$

entonces $I \# K^\infty$.

$\mathcal{T} + (I = K^\infty)$ es inconsistente.

Dem.

$$M = IM = K^\infty M = K K^\infty M = K^\infty \qquad \forall M \in \Lambda_0$$

$(\forall M, N \in \Lambda_0, \quad M = K^\infty = N.)$

Prop. Si $\mathcal{T}$ es sensata, entonces $\mathcal{T}$ es semi-sensata.

Dem.

Supongamos que M solvable, N unsolvable, $\mathcal{T} \vdash M = N$.

· Como M es solvable, $\exists k \, \exists P_1 \dots P_k$. $M P_1 \dots P_k = I$.

· Como N es unsolvable, $N = K^\infty$.

(ES UNSOLVABLE)

$$\boxed{I} = M P_1 \dots P_k = N P_1 \dots P_k = K^\infty P_1 \dots P_k = \boxed{K^\infty}$$

Por el lema anterior, es inconsistente (absurdo).

Reglas de extensionalidad

$$\frac{x \notin fv(M)}{\lambda x.Mx = M}\,\eta \qquad \frac{\begin{array}{c}x \notin fv(M,N)\\ Mx = Nx\end{array}}{M = N}\,ext \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall Q \in \Lambda_0.\\ MQ = NQ\end{array}}{M = N}\,\omega$$

$\eta \Leftrightarrow ext \Leftrightarrow I = 1$

$\omega \Leftrightarrow (ext \wedge tr)$

$$\frac{\forall Q \in \Lambda_0.\ MQ = NQ}{Mx = Nx}\,tr$$

term rule

Lem. $T \vdash \eta \iff T \vdash ext$

Dem. "$\eta \Rightarrow ext$". Sean $M, N \in \Lambda$ tq. $Mx = Nx$ para $x \notin fv(M,N)$.

$$\frac{Mx = Nx}{M = \lambda x.Mx = \lambda x.Nx = N}\,\xi$$

"$ext \Rightarrow \eta$". Quiero ver que $\lambda x.Mx = M$.

Por ext, BVQ. $(\lambda x.Mx)y = My$ ✓

$\overset{\beta}{=} My$

$$\frac{\begin{array}{c}x \notin fv(M,N)\\ Mx = Nx\end{array}}{M = N}\,ext \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall Q \in \Lambda_0.\\ MQ = NQ\end{array}}{M = N}\,\omega \qquad \frac{\forall Q \in \Lambda_0.\ MQ = NQ}{Mx = Nx}\,tr$$

Lema. $T \vdash \omega \iff (T \vdash ext \wedge T \vdash tr)$

Dem.

$(\Rightarrow)$ "$\omega \Rightarrow ext$". Sup. que $Mx = Nx$ $\forall x \notin fv(M,N)$.

Entonces $MQ = NQ$ $\forall Q \in \Lambda_0$.

$$\frac{\dfrac{Mx = Nx}{\lambda x.Mx = \lambda x.Nx}}{(\lambda x.Mx)Q = (\lambda x.Nx)Q}$$

$MQ \qquad NQ$

Por ω, $M = N$.

"$\omega \Rightarrow tr$". Sup. $MQ = NQ$ $\forall Q \in \Lambda_0$

Por ω, $M = N$

Por μ, $Mx = Nx$.

$$\frac{\begin{array}{c} x \notin fv(M,N) \\ Mx = Nx \end{array}}{M = N}\,ext \qquad \frac{\begin{array}{c} \forall Q \in \Lambda_0. \\ MQ = NQ \end{array}}{M = N}\,\omega \qquad \frac{\forall Q \in \Lambda_0.\ MQ = NQ}{Mx = Nx}\,tr$$

$\Leftarrow$) "ext $\wedge$ tr $\Rightarrow \omega$". · Sup. $MQ = NQ \quad \forall Q \in \Lambda_0$.

· Por tr $Mx = Nx$ para alguna $x \notin fv(M,N)$.

· Por ext $M = N$.

$$\frac{\begin{array}{c} \forall M, N \in \Lambda. \\ \forall Q \in \Lambda_0. \\ MQ = NQ \end{array}}{M = N}\,\omega \qquad \frac{\begin{array}{c} \forall M, N \in \Lambda_0 \\ \forall Q \in \Lambda_0. \\ MQ = NQ \end{array}}{M = N}\,\omega_0$$

Lema. $T \vdash \omega \iff T \vdash \omega_0$.

$\Rightarrow$) ✓ $\Leftarrow$) Sean $M, N \in \Lambda$ tq. $\forall Q \in \Lambda_0.\ MQ = NQ.$

Sean $\{x_1, \dots, x_n\} = fv(M,N)$.

$\tilde{M} = \lambda x_1 \dots x_n . M \qquad \tilde{N} = \lambda x_1 \dots x_n . N$ son cerrados.

$\forall Q_1, \dots, Q_n, Q \in \Lambda_0.$

$$\tilde{M} Q_1 \dots Q_n Q = M\{x_1/Q_1, \dots, x_n/Q_n\}\, Q$$
$$\|$$
$$\tilde{N} Q_1 \dots Q_n Q = N\{x_1/Q_1, \dots, x_n/Q_n\}\, Q$$

Aplicando ω_0 $(n+1)$ veces

obtenemos que $\tilde{M} = \tilde{N}$.

Por lo tanto $\underbrace{\tilde{M} x_1 \dots x_n}_{M} = \underbrace{\tilde{N} x_1 \dots x_n}_{N}$.

Modelos de términos

Def. Un álgebra combinatoria es una estructura $(X, \cdot, k, s)$

X: cjto.

$\cdot : X \times X \to X$

que cumple: 1) $(k \cdot x) \cdot y = x \quad \forall x, y \in X.$

2) $((s \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z)$

Además, un álgebra combinatoria es <u>extensional</u> si:

$$\forall x, y \in X. \left(\forall z \in X.\ x \cdot z = y \cdot z \right) \Rightarrow x = y.$$

Def. "Modelos de términos". Si $\mathcal{T}$ es una λ-teoría:

- $$\mathcal{M}(\mathcal{T}) = \left(\Lambda /_{=_\mathcal{T}}, \cdot, [K]_\mathcal{T}, [S]_\mathcal{T} \right)$$

$$[M]_\mathcal{T} \cdot [N]_\mathcal{T} = [MN]_\mathcal{T}$$

$K := \lambda x. \lambda y. x$

$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz)$

El modelo de términos cerrado es:

- $$\mathcal{M}_0(\mathcal{T}) = \left(\Lambda_0 /_{=_\mathcal{T}}, \cdot, [K]_\mathcal{T}, [S]_\mathcal{T} \right).$$

Lema.

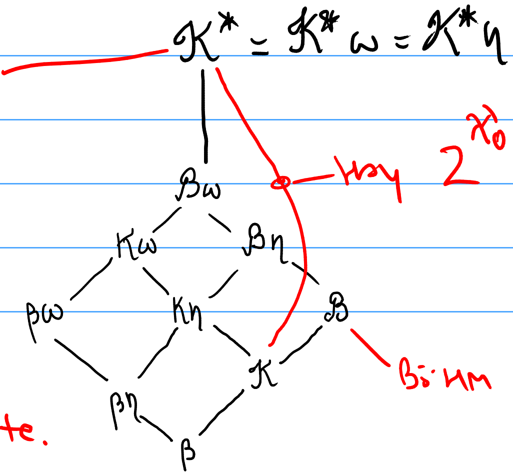
1) $\mathcal{T} \vdash ext \iff \mathcal{M}(\mathcal{T})$ es extensional.
2) $\mathcal{T} \vdash \omega \iff \mathcal{M}_0(\mathcal{T})$ es extensional.

Es Hilbert-Post completa.

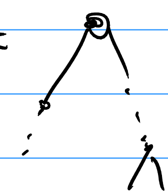
$\forall M, N,$

¿ $\mathcal{K}^* \vdash M = N$

ó $\mathcal{K}^* + (M = N)$ es inconsistente.



$BT(M) =$



$\mathcal{K}^* = \{ M = N \mid \forall C.$

$C[M]$ es solvable

$\iff C[N]$ es solvable $\}$