Capitulo 6: "Classical λ-calculus".

Hilbert —— problema de la decisión "Entscheidungsproblem".

"métodos efectivos"

- Church, cálculo-λ
- Kleene, funciones recursivas
- Turing, máquinas de Turing.

son equivalentes

"Tesis de Church/Turing".

Repaso:

1) Booleanos: $T := \lambda x.\lambda y.x$ $\quad F := \lambda x.\lambda y.y$ $\quad IF := \lambda x.x$

$$IF\ T\ M\ N \twoheadrightarrow M$$
$$IF\ F\ M\ N \twoheadrightarrow N$$

2) Pares: $\langle M, N\rangle := \lambda f.fMN$ $\quad (M)_1 := MT$ $\quad (M)_2 := MF$

$$(\langle M,N\rangle)_1 \twoheadrightarrow M$$
$$(\langle M,N\rangle)_2 \twoheadrightarrow N$$

OJO: El emparejado no es suryectivo: "Surjective pairing"

$$\langle (M)_1, (M)_2\rangle \not\twoheadrightarrow M$$

Por ejemplo:

$$\langle (x)_1, (x)_2\rangle = \langle xT, xF\rangle = \lambda f.f(xT)(xF) \neq x$$

3) n-uplas: $\langle M_1, \dots, M_n\rangle := \lambda f.fM_1\dots M_n$

$$(M)_i^n := M\,\underbrace{(\lambda x_1\dots x_n.x_i)}_{U_i^n}$$

$\langle M_1, \dots, M_n\rangle :=$
$\langle M_1, \langle M_2, \langle M_3, \dots \langle M_n, I\rangle \dots\rangle\rangle\rangle$

---

4) Números:

$0 := I$ $\quad S := \lambda n.\langle F, n\rangle$

$\text{Zero} := \lambda n.nT$ $\quad \text{Pred} := \lambda n.nF$

una codificación.

$n \in \mathbb{N}_0$ $\quad \ulcorner n \urcorner := \underbrace{S(S\dots(S}_{n}\,0)\dots)$

$\text{Zero}\ 0 \to IT \to T$

$\text{Zero}\ (SM) \to (SM)T \to \langle F, M\rangle T \twoheadrightarrow F$

$\text{Pred}\ (SM) \to (SM)F \to \langle F,M\rangle F \twoheadrightarrow M$

OTRA CODIFICACIÓN: "NUMERALES DE Church".

$$\underline{n} := \lambda f.\lambda x.\underbrace{f(f\dots(f}_{n \text{ veces}}\,x)\dots)$$

Teorema (Punto fijo). $\forall M \in \Lambda . \exists F \in \Lambda . \; F \twoheadrightarrow MF$

Dem.

$$F := (\lambda x . M(xx))(\lambda x . M(xx))$$

$$\to M\big(\underbrace{(\lambda x . M(xx))(\lambda x . M(xx))}_{F}\big) = MF .$$

Se puede definir el combinador de punto fijo $Y := \lambda y . (\lambda x . y(xx))(\lambda x . y(xx))$ de Curry.

Cumple:

$$YM =_\beta M(YM)$$

Sin embargo no cumple:

$$YM \twoheadrightarrow M(YM).$$

Ej.:

$$f\,x\,y = y(x f)$$

$$f = \lambda x . \lambda y . y(x f)$$

$$= \big(\underbrace{\lambda f . \lambda x . \lambda y . y(x f)}_{M}\big) f$$

$$YM\,x\,y = M(YM)\,x\,y =$$

$$= y(x(YM))$$

$$YM = (\lambda y . (\lambda x . y(xx))(\lambda x . y(xx)))M$$

$$\to (\lambda x . M(xx))(\lambda x . M(xx))$$

$$\to M(\underbrace{(\lambda x . M(xx))(\lambda x . M(xx))}_{= YM})$$

"Mejora": $\Theta := (\lambda x.\lambda y.\, y(xxy))(\lambda x.\lambda y.\, y(xxy))$

Combinador de punto fijo de Turing

Sí cumple:

$$\Theta M \twoheadrightarrow M(\Theta M)$$

Veámoslo:

$$\Theta M \to (\lambda y.\, y(\Theta y))M \to M(\Theta M)$$

λ-definibilidad

Def. Una función numérica es una función $\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$.

Una función numérica es λ-definible si existe un término $M \in \Lambda$ tq.:

$\forall n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$

$$M \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner =_\beta \ulcorner \varphi(n_1, \ldots, n_p) \urcorner.$$

Obs: No todas las funciones son λ-definibles:

$$\#\{\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N} \mid p \in \mathbb{N}\} = 2^{\aleph_0} = \#\mathbb{R}$$

$$\#\Lambda = \aleph_0 = \#\mathbb{N}$$

¿Existe un λ-término M tq. $\forall$ λ-término N, re

$$\begin{cases} MN = T & \text{si } N = I \\ MN = F & \text{si no} \end{cases}$$

?

Def. Las funciones iniciales son:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & U_i^p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N} \\ \varphi_0(n) = 0 & U_i^p(n_1, \dots, n_p) = n_i \\ \varphi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ \varphi_s(n) = n+1 & \end{array}\right.$$

Def. Una clase $\mathcal{A}$ de funciones numéricas es:

1) Cerrada por composición si

$$\forall \underset{\in\mathcal{A}}{\varphi} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N} \qquad \forall \underset{\in\mathcal{A}}{\psi_1, \dots, \psi_p} : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}$$

$$\exists \chi : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N} \text{ tq. } \in\mathcal{A}$$

$$\chi(n_1, \dots, n_q) = \varphi(\psi_1(n_1, \dots, n_q), \dots, \psi_p(n_1, \dots, n_q))$$

2) Cerrada por recursión primitiva si

$$\forall \underset{\in\mathcal{A}}{\varphi} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N} \qquad \forall \underset{\in\mathcal{A}}{\psi} : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$$

$$\exists \underset{\in\mathcal{A}}{\chi} : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}.$$

$$\chi(0, n_1, \dots, n_p) = \varphi(n_1, \dots, n_p)$$
$$\chi(n+1, n_1, \dots, n_p) = \psi(\chi(n, n_1, \dots, n_p), n+1, n_1, \dots, n_p)$$

3) cerrada por minimización si

$$\forall \varphi_{\in\mathcal{A}} : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$$

$$(\text{tq. } \forall n_1, \dots, n_p \ \exists m.\ \varphi(m, n_1, \dots, n_p) = 0)$$

$$\exists \psi_{\in\mathcal{A}} : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$$

$$\psi(n_1, \dots, n_p) = \min\{m \mid \varphi(m, n_1, \dots, n_p) = 0\}$$

Def. La clase de las funciones recursivas totales es la clase $\mathcal{R}$ más chica que:

1) tiene a las funciones iniciales
2) es cerrada por composición, recursión primitiva y minimización.

Kleene

Teorema. Todas las funciones recursivas totales son λ-definibles.

Dem. Basta ver que el cjto. de funciones λ-definibles tiene a las funciones iniciales y es cerrado.

1) Cero: $M := \lambda x. \ulcorner 0 \urcorner$ $\qquad M \ulcorner n \urcorner =_\beta \ulcorner 0 \urcorner = \ulcorner \varphi_0(n) \urcorner$.

2) sucesor: $M := S$ $\qquad S \ulcorner n \urcorner =_\beta \ulcorner n+1 \urcorner$

3) proyección $M := \lambda x_1 \dots x_p . x_i$

$$M \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner n_i \urcorner = \ulcorner U_i^p(n_1, \dots, n_p) \urcorner$$

4) Composición:

Sean $\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ $\qquad \psi_1, \dots, \psi_p : \mathbb{N}^q \to \mathbb{N}$

λ-definibles, o sea:

$M \in \Lambda$ $\qquad N_1, \dots, N_p \in \Lambda$

tq.
$$\begin{cases} M \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, \dots, n_p) \urcorner \\ N_i \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_q \urcorner = \ulcorner \psi_i(n_1, \dots, n_q) \urcorner & \forall i \end{cases}$$

Entonces: $\quad P := \lambda x_1 \dots x_q . M(N_1 x_1 \dots x_q) \dots (N_p x_1 \dots x_q)$

es fácil ver que
$$\begin{aligned} P \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_q \urcorner &= \\ &= M(N_1 \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_q \urcorner) \dots (N_p \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_q \urcorner) \\ &= M \ulcorner \psi_1(n_1, \dots, n_q) \urcorner \dots \ulcorner \psi_p(n_1, \dots, n_q) \urcorner \\ &= \ulcorner \varphi(\psi_1(n_1, \dots, n_q), \dots, \psi_p(n_1, \dots, n_q)) \urcorner. \end{aligned}$$

---

5) Recursión primitiva:

Sean $\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ $\quad \psi : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$

λ-definibles, es decir que existen $M, N \in \Lambda$

tq.
$$\begin{cases} M \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, \dots, n_p) \urcorner \\ N \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_{p+2} \urcorner = \ulcorner \psi(n_1, \dots, n_{p+2}) \urcorner. \end{cases}$$

Definamos $Q \in \Lambda$ con esta ecuación recursiva:

$$Q = \lambda y\, x_1 \ldots x_p \,.\, \text{IF } (\text{Zero } y)$$
$$(M\, x_1 \ldots x_p)$$
$$(N\, (Q\, (P\, y)\, x_1 \ldots x_p)\, y\, x_1 \ldots x_p)$$

Por el teo. del punto fijo existe un $Q \in \Lambda$ que verifica esa ecuación.
Por inducción en $n \in \mathbb{N}$, se puede ver que:

$Q \ulcorner n \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner$ define una función $\chi : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ tq:

$$\chi(n, n_1, \ldots, n_p) = \begin{cases} \varphi(n_1, \ldots, n_p) & \text{si } n = 0 \\ \psi(\chi(n-1, n_1, \ldots, n_p), n, n_1, \ldots, n_p) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

---

6) Cerrado por minimización:

Sea $\varphi : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ λ-definible
o sea existe un $M \in \Lambda$ tq.

$$M \ulcorner n \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n, n_1, \ldots, n_p) \urcorner$$

y además

$$\forall n_1, \ldots, n_p \; \exists m \,.\, \varphi(m, n_1, \ldots, n_p) = 0.$$

Definimos $Q \in \Lambda$ así:

$$Q = \lambda y \,.\, \lambda x_1 \ldots \lambda x_p .\; \text{IF } (\text{Zero } (M\, y\, x_1 \ldots x_p))$$
$$\text{then } y$$
$$\text{else } Q\, (S\, y)\, x_1 \ldots x_p$$

Por el teo. del punto fijo hay un λ-término $Q \in \Lambda$ que verifica esa ecuación.

Sean $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tq.

$$m \leq \underbrace{\min\{\tilde{m} \in \mathbb{N} \mid \varphi(\tilde{m}, n_1, \ldots, n_p) = 0\}}_{m_0}$$

Entonces

$$Q \ulcorner m \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner m_0 \urcorner$$

Por inducción en $m_0 - m$
podemos ver que vale esa igualdad:

1) Si $m_0 = m$,

$$Q \ulcorner m \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner \underset{\beta}{=} \ulcorner m_0 \urcorner \quad \checkmark$$

2) Si $m_0 > m$,

$$Q \ulcorner m \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner =$$
$$= Q \left(S \ulcorner m \urcorner \right) \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner$$
$$= Q \ulcorner m+1 \urcorner \ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner \underset{h.i.}{=} \ulcorner m_0 \urcorner$$

Punto fijo

$\forall F \; \exists A.$

$$A \underset{\beta}{=} FA$$

Teo (Doble punto fijo). $\forall F, G \in \Lambda$
$\exists A, B \in \Lambda.$

$$\begin{cases} A = FAB \\ B = GAB \end{cases}$$

Primera demo:

- Esta ecuación $\quad A_b = F A_b \, b \quad$ tiene solución usando el teo. de punto fijo usual:

$$A_b := \Theta (\lambda a. \, F a b)$$

- Ahora esta ecuación:

$$B = G A_B \, B$$

también tiene solución usando el teo. de punto fijo usual:

$$B := \Theta (\lambda b. \, G A_b \, b)$$

Por último $\quad A := A_B \quad$ nos da una solución al problema:

$$\begin{cases} A = A_B = \Theta(\lambda a. F a B) = F A_B B = F A B \\ B = \Theta(\lambda b. G A_b \, b) = G A_B B = G A B \end{cases} \quad \checkmark$$

$A = FAB$
$B = GAB$

Segunda demo:

$$Z = \langle F(Z)_1 (Z)_2 , G(Z)_1 (Z)_2 \rangle$$

Usando el teo. de punto fijo usual:

$$Z := \Theta(\lambda x. \langle F(x)_1 (x)_2 , G(x)_1 (x)_2 \rangle)$$

Y ahora: $A = (Z)_1$ $B = (Z)_2$

Y tenemos:

$$\begin{aligned} A &= (Z)_1 \\ &= (\Theta(\lambda x. \langle F(x)_1 (x)_2 , G(x)_1 (x)_2 \rangle))_1 \\ &= (\langle F(Z)_1 (Z)_2 , G(Z)_1 (Z)_2 \rangle)_1 \\ &= F(Z)_1 (Z)_2 = FAB \quad \checkmark \end{aligned}$$

Para B es análogo.