Vimos:

- Funciones recursivas (computables) totales. (Kleene) $\begin{cases} \cdot\, 0,\ suc,\ \pi_i^p \\ \cdot \text{ composición, rec. prim., minimización.} \end{cases}$
- Funciones λ-definibles. $\varphi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$

$$M \ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner = \ulcorner \varphi(n_1, \ldots, n_p) \urcorner$$

- Teorema: todas las funciones recursivas totales son λ-definibles.
- Teorema de punto fijo múltiple. $\forall F_1, \ldots, F_n.\ \exists M_1, \ldots, M_n.$

$$M_1 = F_1 M_1 \ldots M_n$$
$$M_2 = F_2 M_1 \ldots M_n$$
$$\vdots$$
$$M_n = F_n M_1 \ldots M_n$$

Lema. Un término cerrado $T \in \Lambda_0$ es un combinador de punto fijo ($\forall M \in \Lambda.\ TM = M(TM)$) si y sólo si T es un punto fijo de

$$\lambda x. \lambda y. y(xy)$$

(es decir $(\lambda x.\lambda y. y(xy))\, T = T$).

Dem.

Observación: $\lambda x. \lambda y. y(xy) = SI$ $\qquad S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ xz(yz)$, $\quad I = \lambda x.x$

pues: $SI = (\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ xz(yz))\, I$
$= \lambda y.\lambda z.\ Iz(yz)$
$= \lambda y.\lambda z.\ z(yz) \equiv \lambda x.\lambda y.\ y(xy).$

($\Leftarrow$) Sea T un punto fijo de SI y veamos que es un combinador de punto fijo.
Sea $M \in \Lambda$.

$$TM = SITM = IM(TM) = M(TM).$$

($\Rightarrow$) Sup. que T es un combinador de punto fijo y veamos que es un punto fijo de SI.

$$SIT = (\lambda x.\lambda y. y(xy))\, T = \lambda y. y(Ty) = \underbrace{\lambda y. Ty \overset{?}{=} T}$$

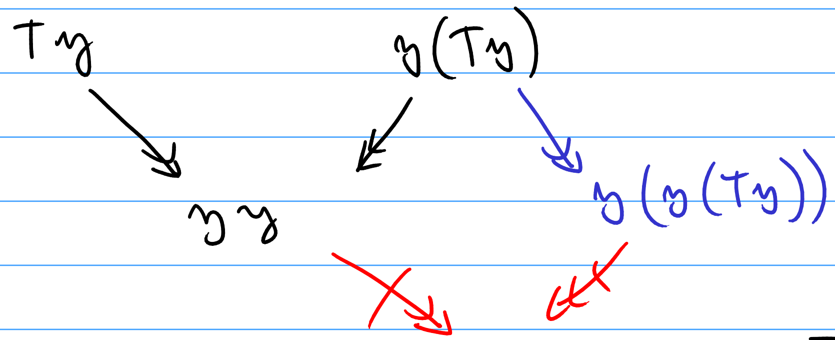
Obs: Si tuviéramos η esto valdría.

Notemos que por confluencia:

$$\begin{tikzcd} Ty \arrow[r, equal] \arrow[dr] & y(Ty) \arrow[d] \\ & y(\ldots) \end{tikzcd}$$

Además, T debe reducir a algo de la forma $\lambda y. T'$.

Porque si no, tendríamos una situación imposible como esta:



Entonces $T \twoheadrightarrow \lambda y. T'$ o sea $T = \lambda y. T'$.

Con esto podemos justificar la igualdad que faltaba:

$$\lambda y. Ty = \lambda y. (\lambda y. T') y = \lambda y. T' = T$$

//

Coro. Hay una familia infinita de combinadores de punto fijo.

- $Y_0 := Y = \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$
- $Y_{n+1} := Y_n (SI)$

Dem. Veamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n es un combinador de punto fijo.

Por el lema anterior, bvq. Y_n es un punto fijo de SI.

- $\underline{n=0}$: Y ✓
- $\underline{\text{"} n \Rightarrow n+1 \text{"}}$: $Y_{n+1} = Y_n (SI) \underset{\text{h.i.}}{=} SI(Y_n(SI)) = SI\, Y_{n+1}$.

Falta ver que si $n \neq m$ entonces $Y_n \neq Y_m$. (Ej. 6.8.9)

$$Y_n \twoheadrightarrow \lambda f. f(f(f(f \dots (Y_n f) \dots) \dots) \qquad Y_m \twoheadrightarrow \lambda f. f(f \dots (f (Y_m f)) \dots))$$

$$Y_n =_{\beta\eta} Y_m \qquad Y_n \neq_\beta Y_m$$

$$Y_n = \lambda f.\, \Omega^n_f \qquad \Omega^0_M = (\lambda x. M(xx))(\lambda x. M(xx))$$

$$\Omega^{n+1}_M = \Omega^n_{SI}\; M$$

Indecidibilidad

Observaciones:

- Hay una función "efectiva" $\# : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva.

  Por ejemplo:

  $\lambda \longmapsto 1$
  $(\longmapsto 2$
  $) \longmapsto 3$
  $x \longmapsto 4$
  $' \longmapsto 5$

  $\lambda x. \lambda y. (yx)$
  1 4 1 4 5 2 4 5 4 3
  $2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^4 \cdot \ldots$

  $\#M$ se llama el código de Gödel de M.

- Hay funciones computables totales:

  $ap : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad$ $num : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

  $ap(\#M, \#N) = \#(MN)$ $\qquad$ $num(n) = \#\ulcorner n \urcorner$

- **Notación:** Si $M \in \Lambda$, vamos a notar $\ulcorner M \urcorner \in \Lambda$:

  $$\ulcorner M \urcorner := \ulcorner \# M \urcorner$$

- Como ap y num son computables totales, se pueden λ-definir con λ-términos Ap, $Num \in \Lambda$ que cumplen:

  $$Ap \ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner = \ulcorner MN \urcorner \qquad Num \ulcorner M \urcorner = \ulcorner \ulcorner M \urcorner \urcorner$$

$(\forall F\, \exists M.\ M = FM)$

Segundo teorema del punto fijo: $\forall F \in \Lambda.\ \exists M \in \Lambda.$
$M = F\ulcorner M \urcorner.$

Dem. Definimos $\begin{cases} W := \lambda x. F(\mathrm{Ap}\ x\ (\mathrm{Num}\ x)) \\ M := W\ulcorner W \urcorner \end{cases}$

y tenemos:

$$
\begin{aligned}
M \equiv W\ulcorner W\urcorner &= F(\mathrm{Ap}\ulcorner W\urcorner(\mathrm{Num}\ulcorner W\urcorner)) \\
&= F(\mathrm{Ap}\ulcorner W\urcorner\ulcorner\ulcorner W\urcorner\urcorner) \\
&= F\ulcorner W\ulcorner W\urcorner\urcorner \\
&= F\ulcorner M\urcorner.
\end{aligned}
$$

Def. Un cjto. $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ se dice cerrado por igualdad si $\forall M \in \mathcal{A},\ \forall N \in \Lambda.\ M =_\beta N$, se tiene que $N \in \mathcal{A}$.
[Análogo a la noción de conjunto de índices].

Def. Dos cjtos. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ se dicen recursivamente separables si $\exists \mathcal{C} \subseteq \Lambda$ tq:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$
2. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$
3. $\mathcal{C}$ es computable

es decir, existe un λ-término P tq. $P\ulcorner M\urcorner = \begin{cases} T & \text{si } M \in \mathcal{C} \\ F & \text{si } M \notin \mathcal{C}. \end{cases}$

$\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \neq \Lambda$
$\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \neq \Lambda$

Teorema (análogo al teorema de Rice)

Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ son no triviales y cerrados por igualdad entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ <u>no</u> son recursivamente separables.

<u>Dem.</u> (Por diagonalización, usando trucos de Cantor, Gödel, Turing, ...).

Supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ fueran recursivamente separables (por el absurdo).

. Es decir, $\mathcal{C} \subseteq \Lambda$, y un término $P \in \Lambda$ tq.:

$$P\ulcorner M \urcorner = \begin{cases} T & \text{si } M \in \mathcal{C} \\ F & \text{si no.} \end{cases}$$

. Definimos $G := \lambda x.\ \mathrm{IF}\ (Px)$ then B else A
donde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

. Por el segundo teorema del punto fijo, existe un $\tilde{G} \in \Lambda$ tq.:

$$\tilde{G} = G\ulcorner \tilde{G} \urcorner$$

. <u>¿$\tilde{G} \in \mathcal{C}$?</u>

. Si $\tilde{G} \in \mathcal{C}$,

$$\tilde{G} = G\ulcorner \tilde{G} \urcorner = \mathrm{IF}\ (P\ulcorner \tilde{G} \urcorner) \text{ then } B \text{ else } A$$
$$= B \in \mathcal{B} \subseteq \Lambda \setminus \mathcal{C}.$$

. Si $\tilde{G} \notin \mathcal{C}$,

$$\tilde{G} = \ldots = A \in \mathcal{A} \in \mathcal{C}.$$

(Absurdo).

<u>Coro:</u> Si $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ es cerrado por igualdad y no trivial entonces $\mathcal{A}$ no es computable.

<u>Coro:</u> No son Computables:

$M = \lambda x_1 \ldots x_n.\ y N_1 \ldots N_k$

- $\{M \in \Lambda \mid M$ tiene forma normal$\}$
- $\{M \in \Lambda \mid M$ tienen <u>head normal form</u>$\}$
- $\{M \in \Lambda \mid \lambda \vdash M = M_0\}$
- $\{M \in \Lambda \mid \mathcal{T} \vdash M = M_0\}$ en cualquier teoría $\mathcal{T}$ que extienda a λ y sea consistente.

Capítulo 7: Lógica Combinatoria

Términos $\quad P, Q, \ldots ::= x \mid K \mid S \mid PQ$

Teoría de igualdad

$$\frac{}{KPQ = P} \qquad \frac{}{SPQR = PR(QR)} \qquad \frac{P = P'}{PQ = P'Q} \qquad \frac{Q = Q'}{PQ = PQ'}$$

$$\frac{}{P = P} \qquad \frac{P = Q}{Q = P} \qquad \frac{P = Q \quad Q = R}{P = R}$$

Lema. Tomando $I := SKK$ se tiene que $IP \twoheadrightarrow P \quad \forall P \in \mathcal{C}$.

Dem.

$$SKKP \to KP(KP) \to P.$$

$K : \alpha \to \beta \to \alpha$

$S : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$

$I : \alpha \to \alpha$

Ej:

$$SII(SII) \longrightarrow I(SII)(I(SII)) \twoheadrightarrow SII(I(SII)) \twoheadrightarrow SII(SII)$$

$\wr$

Ω

Lem. Si $P = P'$ y $Q_1 = Q_1', \ldots, Q_n = Q_n'$

entonces $P\{x_1/Q_1, x_2/Q_2, \ldots, x_n/Q_n\} = P'\{x_1/Q_1', \ldots, x_n/Q_n'\}$.

Dem. (Por inducción).

Def. Para cada $P \in \mathcal{C}$, para cada variable x, definimos:

$$\lambda^* x. P \quad \in \mathcal{C}$$

así, por inducción en el término P:

1. Si $P = x$, $\quad \lambda^* x. x :\equiv I$.
2. Si $x \notin fv(P)$, $\quad \lambda^* x. P :\equiv KP$
3. Si $P = P_1 P_2$, $\quad \lambda^* x. (P_1 P_2) :\equiv S(\lambda^* x. P_1)(\lambda^* x. P_2)$

Desde el punto de vista lógico, la definición de $\lambda^* x. P$ se corresponde con el teorema de la deducción.

$$\frac{x : A \vdash P : B}{\vdash \lambda^* x. P : A \to B}$$

Lema. $(\lambda^* x. P) Q \twoheadrightarrow P\{x/Q\}$ $\quad$ si $x \notin fv(Q)$

Dem. Por inducción en P:

1. $(\lambda^* x. x) Q \equiv IQ \twoheadrightarrow Q \equiv x\{x/Q\}$
2. si $x \notin fv(P)$, $(\lambda^* x. P) Q \equiv KPQ \to P$.
3. Si $P = P_1 P_2$,

$$\begin{aligned}
(\lambda^* x. (P_1 P_2)) Q &\equiv S(\lambda^* x. P_1)(\lambda^* x. P_2) Q \\
&\to (\lambda^* x. P_1) Q \, ((\lambda^* x. P_2) Q) \\
&\xrightarrow{h.i.}\!\!\!\!\rightarrow P_1\{x/Q\} \, ((\lambda^* x. P_2) Q) \\
&\xrightarrow{h.i.}\!\!\!\!\rightarrow P_1\{x/Q\} \, P_2\{x/Q\} \\
&\equiv (P_1 P_2)\{x/Q\}.
\end{aligned}$$

Ojo: la reducción en CL es más débil que en λ.

P.ej.:

- SI está en forma normal en CL
- $SI = (\lambda xyz. xz(yz)) I \twoheadrightarrow \lambda yz. z(yz)$

Relación entre CL y λ:

$(\ )_{CL} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{C}$

$(x)_{CL} := x$

$(MN)_{CL} := (M)_{CL}(N)_{CL}$

$(\lambda x.M)_{CL} := \lambda^*x.(M)_{CL}$

$(\ )_\lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \Lambda$

$(x)_\lambda = x$

$(K)_\lambda = \lambda xy.x$

$(S)_\lambda = \lambda xyz.xz(yz)$

$(PQ)_\lambda = (P)_\lambda (Q)_\lambda$

Lema. Si $P=Q$ en CL, entonces $(P)_\lambda = (Q)_\lambda$ en λ.

Dem. Por inducción en la derivación de $P=Q$.
Los casos interesantes son:

$$KPQ = P \implies (KPQ)_\lambda = K_\lambda P_\lambda Q_\lambda = P_\lambda$$

y lo mismo para "SPQR".

Pero no vale la vuelta, es decir si $M=N$ en λ no necesariamente $(M)_{CL} = (N)_{CL}$.

La dificultad está acá:

$$\frac{M=N}{\lambda x.M = \lambda x.N}\ \xi \qquad M_{CL} = N_{CL} \qquad \lambda^*x.M_{CL} \overset{?}{=} \lambda^*x.N_{CL}$$

Contraejemplo:

$$\lambda x.(\lambda x.x)x = \lambda x.x \quad \text{en } \lambda$$

pero:

$$\lambda^*x.(\lambda^*x.x)x = \lambda^*x.Ix = S(KI)I \neq \lambda^*x.x = I$$

Se puede dar un cjto. finito de axiomas A_β

tq. $CL + A_\beta$ es equivalente a λ.

Ej. $K = \underbrace{\lambda^* xy.Kxy}_{S(S(KS)(S(KK)\dots))}$