

$t ::= x \mid \lambda x. t \mid t t$

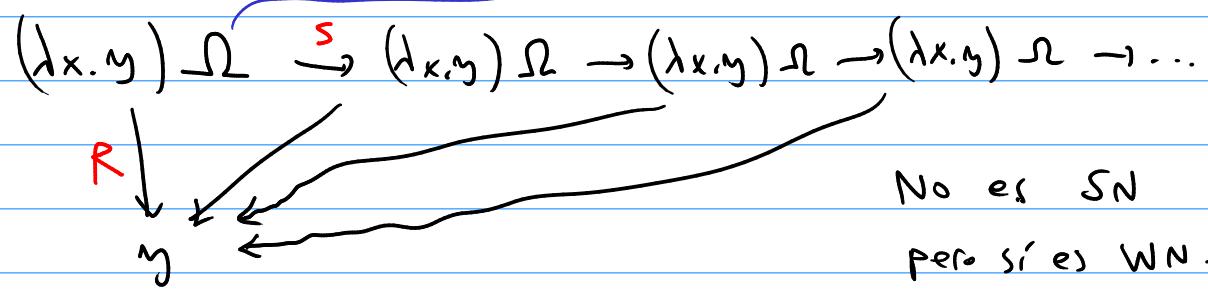
Def. Un término t es ^(débilmente) normalizante si existe una reducción $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n$ tal que t_n está en F.N. $n \geq 0$

• Un término t es fuertemente normalizante si no existe una reducción $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ infinita.

Obs. Hay términos que son débilmente normalizantes pero no fuertemente.

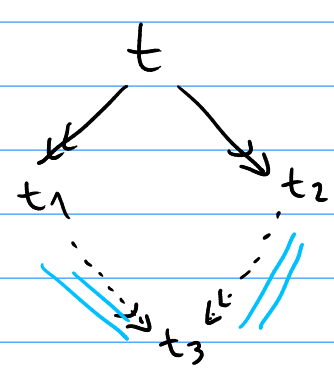
Ej.

$\left(\begin{array}{l} \text{fact } 0 = \text{if } 0 = 0 \\ \text{then } 1 \\ \text{else } 0 + \text{fact}(0-1) \end{array} \right) \Omega = (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$



Idea: Si uno reduce siempre el redex cuya λ está más a la izquierda, ese proceso siempre alcanza la forma normal del término. *si es que existe.*

Obs. Si un término tiene FN, es única.



Def. Reducción ^{Paralela} en simultáneo. " $t \Rightarrow s$ "

$$\frac{}{x \Rightarrow x} \qquad \frac{t \Rightarrow t'}{\lambda x. t \Rightarrow \lambda x. t'} \qquad \frac{t \Rightarrow t' \quad s \Rightarrow s'}{ts \Rightarrow t's'}$$

$$\frac{t \Rightarrow t' \quad s \Rightarrow s'}{(\lambda x. t) s \Rightarrow t' \{x := s'\}}$$

Lema. Todo término se escribe de una de las dos formas siguientes:

1) $\lambda \vec{x}. \textcircled{y} \vec{t}$ ← HEAD NORMAL FORMS (HNF).

2) $\lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{t}$ ← HEAD REDEX

$$\lambda \vec{x}. t = \lambda x_1 \dots \lambda x_n. t$$

$$\vec{x} = x_1, \dots, x_n$$

$$t \vec{s} = (ts_1) s_2 \dots s_n$$

$$\vec{s} = s_1, \dots, s_n$$

Def. $t \xrightarrow{h} s$ si $t \rightarrow s$
 Contrayendo el head redex.
 HEAD REDUCTION

• $t \xrightarrow{i} s$ si $t \rightarrow s$ Contrayendo un redex que no sea head.
 REDUCCIÓN INTERNA.

• $t \xrightarrow{l} s$ si $t \rightarrow s$ Contrayendo el redex cuya λ es la de más a la izquierda.
 LEFTMOST REDUCTION

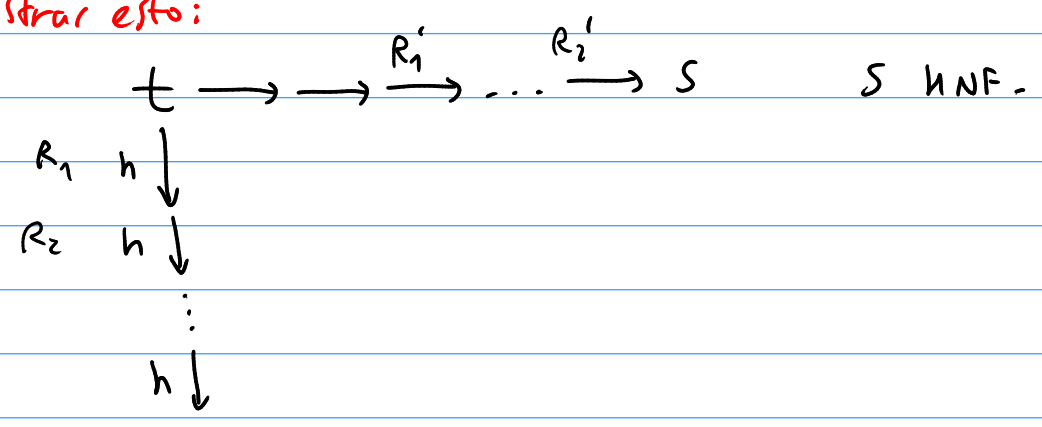
$$\rightarrow = \xrightarrow{h} \cup \xrightarrow{i}$$

Idea. Si un término t tiene head normal form,
la reducción head alcanza alguna head normal form de t .

obs. Un término no necesariamente tiene única HNF.

$$\lambda x. y (Iz) \longrightarrow \lambda x. y z$$

Idea de cómo demostrar esto:



Def. (Reducción paralela interna).

• si $\vec{t} = t_1, \dots, t_n$ $\vec{s} = s_1, \dots, s_n$

notamos

$$\vec{t} \Rightarrow \vec{s} \quad \text{ii} \quad t_i \Rightarrow s_i \quad \forall i=1..n$$

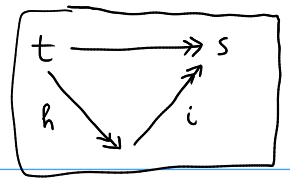
$$\bullet \quad \frac{\vec{t} \Rightarrow \vec{s} \quad p \Rightarrow p' \quad q \Rightarrow q' \quad \vec{t} \Rightarrow \vec{s}}{\lambda \vec{x}. y \vec{t} \xRightarrow{i} \lambda \vec{x}. y \vec{s} \quad \lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{t} \xRightarrow{i} \lambda \vec{x}. (\lambda y. p') q' \vec{s}}$$

- Lema.
- 1) si $t \xrightarrow{h} t'$ entonces $\lambda x. t \xrightarrow{h} \lambda x. t'$.
 - 2) si $t \xrightarrow{h} t'$ y $t \neq \lambda$ entonces $t s \xrightarrow{h} t' s$.
 - 3) si $t \xrightarrow{h} t'$ entonces $t \{x:=s\} \xrightarrow{h} t' \{x:=s\}$.

Dem. 1) $\lambda x. \lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{s} \xrightarrow{h} \lambda x. \lambda \vec{x}. p \{y:=q\} \vec{s}$

2) $(\lambda y. p) q \vec{s} s \xrightarrow{h} p \{y:=q\} \vec{s} s$

3) $\lambda \vec{z}. (\lambda y. p) q \vec{r} \xrightarrow{h} \lambda \vec{z}. p \{y:=q\} \vec{r} = \lambda \vec{z}. p \{y:=q\} \vec{r}$



Def. " $t \equiv s$ ".

$$\frac{t \xrightarrow{i} s}{t \equiv s}$$

$$\frac{t \xrightarrow{h} t' \quad t' \equiv s}{t \equiv s}$$

Alternativamente: $t \equiv s$ sii

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} t_2 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \xrightarrow{i} s$$

donde $t_i \equiv s \quad \forall i = 0 \dots n$.

Lem. 1) Si $t \equiv t'$ entonces $\lambda x. t \equiv \lambda x. t'$.

2) Si $t \equiv t'$ y $s \equiv s'$ entonces $ts \equiv t's'$.

3) Si $t \equiv t'$ y $s \equiv s'$ entonces $t\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$.

Dem.

1) Sea $t \equiv t'$. O sea $t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \xrightarrow{i} t'$. $t_i \equiv t' \quad \forall i = 0 \dots n$

$$\text{Entonces } \lambda x. t_0 \xrightarrow{h} \lambda x. t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} \lambda x. t_n \xrightarrow{i} \lambda x. t'$$

y $\lambda x. t_i \equiv \lambda x. t' \quad \forall i = 0 \dots n$.

2) Si $t \equiv t'$ y $s \equiv s'$ entonces $ts \equiv t's'$.

Sea $t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \xrightarrow{i} t'$, donde además $t_i \equiv t'$

Consideremos dos casos:

2.1) Si ninguno de los t_i es una abstracción.

Entonces:

$$t_0 s \xrightarrow{h} t_1 s \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n s \xrightarrow{i} t'_n s'$$

2.2) Si alguno de los t_i es una abstracción, sea t_j el primero que es una abstracción.

$$t_0 s \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_j s \xrightarrow{i} t'_j s'$$

y además $t_i s \equiv t'_i s' \quad \forall i = 0 \dots j$.

3) si $t \equiv t'$ y $s \equiv s'$ entonces $t\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$.

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \xrightarrow{i} t'$$

• Veamos primero que si $t \xrightarrow{i} t'$ y $s \equiv s'$ entonces $t\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$.

Dem. Caso 1. si $t = \lambda \vec{y}. z \vec{u} \xrightarrow{i} t' = \lambda \vec{y}. z \vec{v}$ donde $\vec{u} \equiv \vec{v}$.

Caso 1.1. si $z = x$:

$$\lambda \vec{y}. s \vec{u}\{x:=s\} \equiv \lambda \vec{y}. s' \vec{v}\{x:=s'\}$$

Caso 1.2. si $z \neq x$:

$$\lambda \vec{y}. z \vec{u}\{x:=s\} \xrightarrow{i} \lambda \vec{y}. z \vec{v}\{x:=s'\} \quad \checkmark$$

Caso 2: si $t = \lambda \vec{y}. (\lambda z. p) q \vec{u} \xrightarrow{i} t' = \lambda \vec{y}. (\lambda z. p') q' \vec{v}$
donde $p \equiv p'$, $q \equiv q'$, $\vec{u} \equiv \vec{v}$.

$$\text{entonces } \lambda \vec{y}. (\lambda z. p) q \vec{u} \xrightarrow{i} \lambda \vec{y}. (\lambda z. p') q' \vec{v}$$

3) si $t \equiv t'$ y $s \equiv s'$ entonces $t\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$.

En el caso general,

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \xrightarrow{i} t' \quad \text{donde } t_i \equiv t'$$

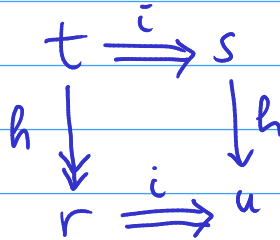
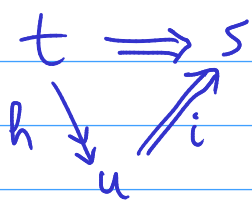
$$t_0\{x:=s\} \xrightarrow{h} t_1\{x:=s\} \rightarrow \dots \xrightarrow{h} t_n\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$$

$$\text{donde } t_i\{x:=s\} \equiv t'\{x:=s'\}$$

Lema. 1) Si $t \Rightarrow S$ entonces $t \xrightarrow{h} u \xRightarrow{i} S$ para algún u .

2) Si $t \xRightarrow{i} S \xrightarrow{h} u$ entonces $t \xrightarrow{h} r \xRightarrow{i} u$.

Gráficamente:



Dem.

1) Si $t \Rightarrow S$ entonces $t \xrightarrow{h} u \xRightarrow{i} S$ para algún u .

Por inducción en la derivación $t \Rightarrow S$ vamos a ver que $t \Rightarrow S$.

- 1.1) $\overline{x \Rightarrow x}$ En ese caso trivialmente vale $x \Rightarrow x$.
- 1.2) $\frac{t \Rightarrow S}{\lambda x. t \Rightarrow \lambda x. S}$ Por h.i. $t \Rightarrow S$
por lo tanto $\lambda x. t \Rightarrow \lambda x. S$
por ítem 1 del lema anterior.
- 1.3) $\frac{t_1 \Rightarrow S_1 \quad t_2 \Rightarrow S_2}{t_1 t_2 \Rightarrow S_1 S_2}$ Por h.i. $t_1 \Rightarrow S_1$
por lo tanto $t_1 t_2 \Rightarrow S_1 S_2$
por ítem 2 del lema anterior.
- 1.4) $\frac{t_1 \Rightarrow S_1 \quad t_2 \Rightarrow S_2}{(\lambda x. t_1) t_2 \Rightarrow S_1 \{x := S_2\}}$ Por h.i., $t_1 \Rightarrow S_1$
 $t_2 \Rightarrow S_2$

Por lo tanto:

$$(\lambda x. t_1) t_2 \xrightarrow{h} t_1 \{x := t_2\} \Rightarrow S_1 \{x := S_2\}$$

|
por ítem 3 del lema anterior.

"Postponement de pasor internos".

2) si $t \xrightarrow{i} s \xrightarrow{h} u$ entonces $t \xrightarrow{h \circ i} u$.

Veamos como se deduce $t \xrightarrow{i} s$.

2.1] $t = \lambda \vec{x}. y \vec{p} \xrightarrow{i} \lambda \vec{x}. y \vec{q} \xrightarrow{h} u$

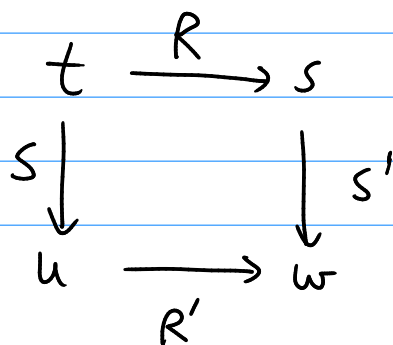
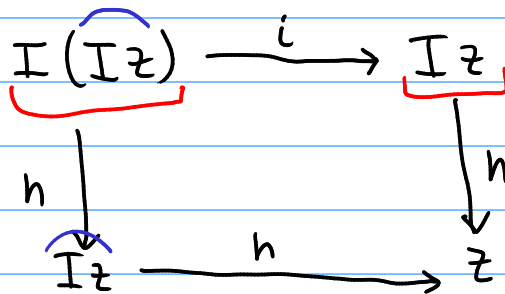
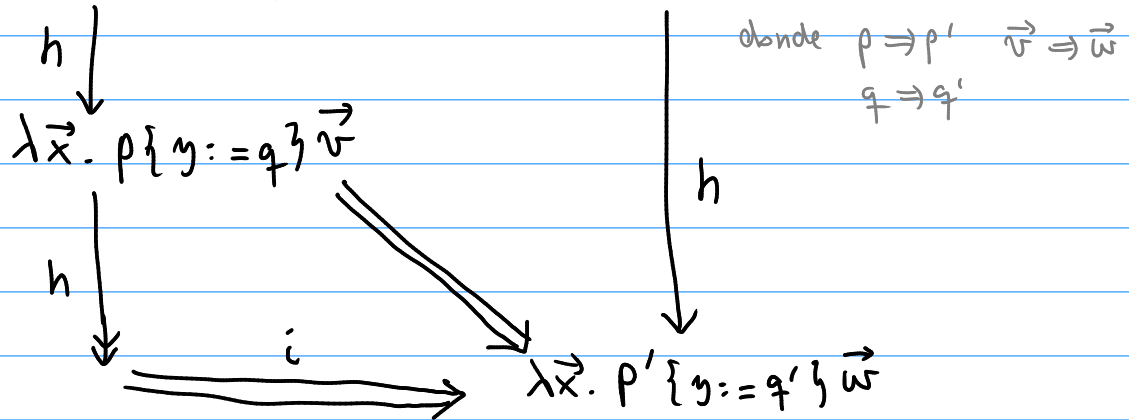
$\vec{p} \Rightarrow \vec{q}$

(Este caso es imposible).

este paso no puede existir.

pues esto es una KNF.

2.2] $t = \lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{v} \xrightarrow{i} \lambda \vec{x}. (\lambda y. p') q' \vec{w}$



• R es head
 $\Rightarrow R'$ es head

• R es interno
~~R'~~ es interno

$$\lambda \vec{x}. (h y. p) q \vec{u} \xrightarrow{h} \lambda \vec{x}. p \{y := q\} \vec{u}$$

Lema. Si $t \Rightarrow t'$ y $s \Rightarrow s'$
entonces $t \{x := s\} \Rightarrow t' \{x := s'\}$.

Teorema. Si t tiene head normal form (es decir, $t \rightarrow s'$ s' HNF.)
entonces $t \xrightarrow{h} s$ donde s es una head normal form.

Dem.
 $t \rightarrow \dots \rightarrow s'$ s' HNF

luego $t \Rightarrow \dots \Rightarrow s'$

luego $t \xrightarrow{h} \overset{i}{\Rightarrow} \xrightarrow{h} \overset{i}{\Rightarrow} \dots \xrightarrow{h} \overset{i}{\Rightarrow} s'$

luego $t \xrightarrow{h} s \overset{i}{\Rightarrow} \dots \overset{i}{\Rightarrow} s'$

Afirmación: s es una HNF. (Se llama la HNF principal de t).

Teorema. Si t tiene forma normal, ($t \rightarrow s$ s F.N.)
entonces $t \xrightarrow{r} s$ donde s es la forma normal de t .

Dem. Por inducción en el tamaño del término s .

Sabemos que $t \rightarrow s$ donde s está en f.n.

En particular, s es una HNF.

Por lo tanto:

$$t \xrightarrow{h} \lambda \vec{x}. y t_1 t_2 \dots t_n \rightarrow s$$

Entonces s necesariamente debe ser de la forma:

$$s = \lambda \vec{x}. y s_1 \dots s_n \text{ donde } t_i \rightarrow s_i.$$

Por HI $t_i \xrightarrow{r} s_i$.

Por lo tanto:

$$\xrightarrow{h} \subseteq \xrightarrow{l}$$

$$t \xrightarrow{h} \lambda \vec{x} \cdot y t_1 t_2 \dots t_n$$

$$\xrightarrow{l} \lambda \vec{x} \cdot y s_1 t_2 \dots t_n$$

$$\xrightarrow{l} \lambda \vec{x} \cdot y s_1 s_2 t_3 \dots t_n$$

⋮

$$\xrightarrow{l} \lambda \vec{x} \cdot y s_1 s_2 \dots s_n = S \quad .$$
