$t ::= x \mid \lambda x.t \mid t\,t$

Def. • Un término t es (débilmente) normalizante si existe una reducción $t = t_0 \to t_1 \to t_2 \to \dots \to t_n$ tq. t_n está en F.N. $n \geq 0$

$\Uparrow \qquad \not\Downarrow$

• Un término t es fuertemente normalizante si no existe una reducción $t = t_0 \to t_1 \to t_2 \to \dots$ infinita.

Obs. Hay términos que son débilmente normalizantes pero no fuertemente.

Ej.

$$\left(\begin{array}{l} \text{fact } o = \text{if } o = 0 \\ \qquad \text{then } 1 \\ \qquad \text{else } o * \text{fact}(o-1) \end{array}\right) \qquad \Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

$$(\lambda x.y)\,\Omega \xrightarrow{S} (\lambda x.y)\,\Omega \to (\lambda x.y)\,\Omega \to (\lambda x.y)\,\Omega \to \dots$$

$$(\lambda x.y)\,\Omega \xrightarrow{R} y$$

No es SN pero sí es WN.

Idea: Si uno reduce siempre el redex cuya λ está más a la izquierda, ese proceso siempre alcanza la forma normal del término. Si es que existe.

Obs. Si un término tiene FN, es única.

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ t_1 \arrow[dr, dotted, two heads] & & t_2 \arrow[dl, dotted, two heads] \\ & t_3 & \end{tikzcd}$$

Def. Reducción en simultáneo / paralela. "$t \Rrightarrow s$"

$$\frac{}{x \Rrightarrow x} \qquad \frac{t \Rrightarrow t'}{\lambda x.t \Rrightarrow \lambda x.t'} \qquad \frac{t \Rrightarrow t' \quad s \Rrightarrow s'}{ts \Rrightarrow t's'}$$

$$\frac{t \Rrightarrow t' \qquad s \Rrightarrow s'}{(\lambda x.t)s \Rrightarrow t'\{x := s'\}}$$

Lema. Todo término se escribe de una de las dos formas siguientes:

1) $\lambda\vec{x}.\underbrace{y}_{\text{HEAD VARIABLE}}\vec{t}$ ⟵ HEAD NORMAL FORMS (HNF).

2) $\lambda\vec{x}.\underbrace{(\lambda y.p)\,q}_{\text{HEAD REDEX}}\vec{t}$

$\lambda\vec{x}.t = \lambda x_1 \dots \lambda x_n.t$

$\vec{x} = x_1, \dots, x_n$

$t\vec{s} = (ts_1)s_2 \dots s_n$

$\vec{s} = s_1, \dots, s_n$

Def. • $t \xrightarrow{h} s$ si $t \to s$ contrayendo el head redex.

HEAD REDUCTION

• $t \xrightarrow{i} s$ si $t \to s$ contrayendo un redex que no sea head.

REDUCCIÓN INTERNA.

$$\longrightarrow \; = \; \xrightarrow{h} \overset{+}{\cup} \xrightarrow{i}$$

• $t \xrightarrow{\ell} s$ si $t \to s$ contrayendo el redex cuya λ es la de más a la izquierda.

LEFTMOST REDUCTION

<u>Idea</u>. Si un término t tiene head normal form, la reducción head alcanza alguna head normal form de t.

<u>obs</u>. Un término no necesariamente tiene única HNF.

$$\lambda x. y (I z) \longrightarrow \lambda x. y z$$

Idea de como demostrar esto:

$$\begin{array}{lllll}
 & t \longrightarrow \longrightarrow \xrightarrow{R_1'} \cdots \xrightarrow{R_2'} s & & s \text{ HNF.} \\
R_1 & \downarrow h & & \\
R_2 & \downarrow h & & \\
 & \vdots & & \\
 & \downarrow h & &
\end{array}$$

<u>Def</u>. (Reducción paralela interna).

- Si $\vec{t} = t_1, \dots, t_n$ $\quad \vec{s} = s_1, \dots, s_n$ notamos
$$\vec{t} \Rightarrow \vec{s} \quad \text{sii} \quad t_i \Rightarrow s_i \quad \forall i = 1..n$$

- $$\frac{\vec{t} \Rightarrow \vec{s}}{\lambda \vec{x}. y \vec{t} \overset{i}{\Rightarrow} \lambda \vec{x}. y \vec{s}} \qquad \frac{p \Rightarrow p' \quad q \Rightarrow q' \quad \vec{t} \Rightarrow \vec{s}}{\lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{t} \overset{i}{\Rightarrow} \lambda \vec{x}. (\lambda y. p') q' \vec{s}}$$

<u>Lema</u>. 1) Si $t \xrightarrow{h} t'$ entonces $\lambda x. t \xrightarrow{h} \lambda x. t'$.
2) Si $t \xrightarrow{h} t'$ y $t \neq \lambda$ entonces $t s \xrightarrow{h} t' s$.
3) Si $t \xrightarrow{h} t'$ entonces $t\{x:=s\} \xrightarrow{h} t'\{x:=s\}$.

<u>Dem</u>. 1) $\lambda x. \lambda \vec{x}. (\lambda y. p) q \vec{s} \xrightarrow{h} \lambda x. \lambda \vec{x}. p\{y:=q\} \vec{s}$

2) $(\lambda y. p) q \vec{s} s \xrightarrow{h} p\{y:=q\} \vec{s} s$

3) $\lambda \vec{z}. (\lambda y. p^\bullet) q^\bullet \vec{r}^\bullet \xrightarrow{h} \lambda \vec{z}. p^\bullet\{y:=q^\bullet\} \vec{r}^\bullet$
$= \lambda \vec{z}. p\{y:=q\}^\bullet \vec{r}^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "h"'] & & s \\
& \cdot \arrow[ur, two heads, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Def. "$t \Rrightarrow s$".

$$\frac{t \overset{i}{\Rrightarrow} s}{t \Rrightarrow s} \qquad\qquad \frac{t \xrightarrow{h} t' \qquad t' \Rrightarrow s \qquad t \Rrightarrow s}{t \Rrightarrow s}$$

Alternativamente: $t \Rrightarrow s$ sii

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} t_2 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \overset{i}{\Rrightarrow} s$$

donde $t_i \Rrightarrow s \quad \forall i = 0..n.$

Lem. 1) Si $t \Rrightarrow t'$ entonces $\lambda x.t \Rrightarrow \lambda x.t'$.

2) Si $t \Rrightarrow t'$ y $s \Rrightarrow s'$ entonces $t s \Rrightarrow t' s'$.

3) Si $t \Rrightarrow t'$ y $s \Rrightarrow s'$ entonces $t\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$.

Dem.

1) Sea $t \Rrightarrow t'$. O sea $t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \overset{i}{\Rrightarrow} t'$. $\quad t_i \Rrightarrow t' \ \forall i=0..n$

Entonces $\lambda x.t_0 \xrightarrow{h} \lambda x.t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} \lambda x.t_n \overset{i}{\Rrightarrow} \lambda x.t'$

y $\lambda x.t_i \Rrightarrow \lambda x.t' \quad \forall i=0..n$.

2) Si $t \Rrightarrow t'$ $\quad s \Rrightarrow s'$ entonces $t s \Rrightarrow t' s'$.

Sea $t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \overset{i}{\Rrightarrow} t'$, donde además $t_i \Rrightarrow t'$

Consideremos dos casos:

2.1) Si ninguno de los t_i es una abstracción.

Entonces:

$$t_0 s \xrightarrow{h} t_1 s \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n s \overset{i}{\Rrightarrow} t_n' s'$$

2.2) Si alguno de los t_i es una abstracción, sea t_j el primero que es una abstracción.

$$t_0 s \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_j s \overset{i}{\Rrightarrow} t' s'$$

y además $t_i s \Rrightarrow t' s' \quad \forall i = 0..j$.

3) Si $t \Rrightarrow t'$ y $s \Rrightarrow s'$ entonces $t\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$.

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \overset{i}{\Rrightarrow} t'$$

- Veamos primero que si $t \overset{i}{\Rrightarrow} t'$ y $s \Rrightarrow s'$ entonces $t\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$.

Dem. Caso 1. Si $t = \lambda \vec{y}. z \vec{u} \overset{i}{\Rrightarrow} t' = \lambda \vec{y}. z \vec{v}$ donde $\vec{u} \Rightarrow \vec{v}$.

Caso 1.1. Si $z = x$:

$$\lambda \vec{y}. s \vec{u}\{x:=s\} \Rrightarrow \lambda \vec{y}. s' \vec{v}\{x:=s'\}$$

Caso 1.2. Si $z \neq x$:

$$\lambda \vec{y}. z \vec{u}\{x:=s\} \overset{i}{\Rrightarrow} \lambda \vec{y}. z \vec{v}\{x:=s'\}$$ ✓

Caso 2: Si $t = \lambda \vec{y}.(\lambda z. p) q \vec{u} \overset{i}{\Rrightarrow} t' = \lambda \vec{y}.(\lambda z. p') q' \vec{v}$ donde $p \Rightarrow p'$, $q \Rightarrow q'$, $\vec{u} \Rightarrow \vec{v}$.

entonces $\lambda \vec{y}.(\lambda z. p^{\bullet}) q^{\bullet} \vec{u}^{\bullet} \overset{i}{\Rrightarrow} \lambda \vec{y}.(\lambda z. p'^{\bullet}) q'^{\bullet} \vec{v}^{\bullet}$

3) Si $t \Rrightarrow t'$ y $s \Rrightarrow s'$ entonces $t\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$.

En el caso general,

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_n \overset{i}{\Rrightarrow} t' \quad \text{donde } t_i \Rightarrow t'$$

y

$$t_0\{x:=s\} \xrightarrow{h} t_1\{x:=s\} \to \dots \xrightarrow{h} t_n\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$$

donde $t_i\{x:=s\} \Rightarrow t'\{x:=s'\}$

Lema. 1) Si $t \Rrightarrow s$ entonces $t \xrightarrow{h}\!\!\rightarrow u \overset{i}{\Rrightarrow} s$ para algún u.

2) Si $t \overset{i}{\Rrightarrow} s \xrightarrow{h} u$ entonces $t \xrightarrow{h}{}^{+} r \overset{i}{\Rrightarrow} u$.

Gráficamente:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[rr, Rrightarrow] \arrow[dr, "h"'] & & s \\ & u \arrow[ur, Rightarrow, "i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r, Rrightarrow, "i"] \arrow[d, "h"'] & s \arrow[d, "h"] \\ r \arrow[r, Rrightarrow, "i"] & u \end{tikzcd}$$

Dem.

1) Si $t \Rrightarrow s$ entonces $t \xrightarrow{h}\!\!\rightarrow u \overset{i}{\Rrightarrow} s$ para algún u.

Por inducción en la derivación $t \Rrightarrow s$ vamos a ver que $t \Rrightarrow s$.

1.1) $\overline{x \Rrightarrow x}$ En ese caso trivialmente vale $x \Rrightarrow x$.

1.2) $\dfrac{t \Rrightarrow s}{\lambda x.t \Rrightarrow \lambda x.s}$ Por h.i. $t \Rrightarrow s$

por lo tanto $\lambda x.t \Rrightarrow \lambda x.s$

por ítem 1 del lema anterior.

1.3) $\dfrac{t_1 \Rrightarrow s_1 \quad t_2 \Rrightarrow s_2}{t_1 t_2 \Rrightarrow s_1 s_2}$ Por h.i. $t_1 \Rrightarrow s_1$

Por lo tanto $t_1 t_2 \Rrightarrow s_1 s_2$

por ítem 2 del lema anterior.

1.4) $\dfrac{t_1 \Rrightarrow s_1 \quad t_2 \Rrightarrow s_2}{(\lambda x.t_1)t_2 \Rrightarrow s_1\{x:=s_2\}}$ Por h.i., $t_1 \Rrightarrow s_1$

$t_2 \Rrightarrow s_2$

Por lo tanto:

$$(\lambda x.t_1)t_2 \xrightarrow{h} t_1\{x:=t_2\} \Rrightarrow s_1\{x:=s_2\}$$

Por ítem 3 del lema anterior.

"Postponement de pasos internos".

2) Si $t \overset{i}{\Rightarrow} s \xrightarrow{h} u$ entonces $t \xrightarrow{h^+} r \overset{i}{\Rightarrow} u$.

Veamos cómo se deduce $t \overset{i}{\Rightarrow} s$.

2.1) $t = \lambda\vec{x}.y\vec{p} \overset{i}{\Longrightarrow} \lambda\vec{x}.y\vec{q} \xrightarrow{h} u$

$\vec{p} \Rightarrow \vec{q}$

(este caso es imposible).

este paso no puede existir.

pues esto es una HNF.

2.2)

$$
\begin{tikzcd}
t = \lambda\vec{x}.(\lambda y.p)\,q\,\vec{v} \arrow[rr, Rightarrow, "i"] \arrow[d, "h"] & & \lambda\vec{x}.(\lambda y.p')\,q'\,\vec{w} \arrow[dd, "h"] \\
\lambda\vec{x}.p\{y:=q\}\vec{v} \arrow[d, "h"] \arrow[drr, Rightarrow] & & \\
{} \arrow[rr, Rightarrow, "i"] & & \lambda\vec{x}.p'\{y:=q'\}\vec{w}
\end{tikzcd}
$$

donde $p \Rightarrow p'$, $\vec{v} \Rightarrow \vec{w}$, $q \Rightarrow q'$

$$
\begin{tikzcd}
I(Iz) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & Iz \arrow[d, "h"] \\
Iz \arrow[r, "h"] & z
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S"'] & s \arrow[d, "S'"] \\
u \arrow[r, "R'"'] & w
\end{tikzcd}
$$

- R es head
  $\Rightarrow R'$ es head
- R es interno
  $\not\Rightarrow R'$ es interno

$$\lambda\vec{x}.(\lambda y.p)\,q\,\vec{u} \xrightarrow{h} \lambda\vec{x}.p\{y:=q\}\,\vec{u}$$

Lema. Si $t \Rrightarrow t'$ y $s \Rrightarrow s'$
entonces $t\{x:=s\} \Rrightarrow t'\{x:=s'\}$.

Teorema. Si t tiene head normal form — Es decir, $t \twoheadrightarrow s'$ s' HNF.
entonces $t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow s$ donde s es una head normal form.

Dem.

$$t \to \to \cdots \to s' \qquad s' \text{ HNF}$$

luego $t \Rrightarrow \Rrightarrow \cdots \Rrightarrow s'$

luego $t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \overset{i}{\Rrightarrow} \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \overset{i}{\Rrightarrow} \cdots \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \overset{i}{\Rrightarrow} s'$

luego $t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow s \overset{i}{\Rrightarrow} \cdots \overset{i}{\Rrightarrow} s'$

Afirmación: s es una HNF. (Se llama la HNF principal de t).

Teorema. Si t tiene forma normal, — $t \twoheadrightarrow s$ s F.N.
entonces $t \xrightarrow{\ell}\!\!\twoheadrightarrow s$ donde s es la forma normal de t.

Dem. Por inducción en el tamaño del término s.

Sabemos que $t \twoheadrightarrow s$ donde s está en f.n.
En particular, s es una HNF.
Por lo tanto:

$$t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \lambda\vec{x}.y\,t_1\,t_2\ldots t_n \twoheadrightarrow s$$

Entonces s necesariamente debe ser de la forma:

$$s = \lambda\vec{x}.y\,s_1\ldots s_n \quad \text{donde } t_i \twoheadrightarrow s_i.$$

Por HI $t_i \xrightarrow{\ell}\!\!\twoheadrightarrow s_i$.

Por lo tanto: $\xrightarrow{h} \subseteq \xrightarrow{l}$

$$
\begin{aligned}
t &\xrightarrow{h}\!\!\!\rightarrow \lambda\vec{x}.y\, t_1 t_2 \ldots t_n \\
&\xrightarrow{l}\!\!\!\rightarrow \lambda\vec{x}.y\, s_1 t_2 \ldots t_n \\
&\xrightarrow{l}\!\!\!\rightarrow \lambda\vec{x}.y\, s_1 s_2 t_3 \ldots t_n \\
&\quad \vdots \\
&\xrightarrow{l}\!\!\!\rightarrow \lambda\vec{x}.y\, s_1 s_2 \ldots s_n = s \quad .
\end{aligned}
$$

//