$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid t\,t$$

SOLVABILITY

Def. - Un término $t \in \Lambda^0$ es solvable si existen un $n \geq 0$ y $s_1, \dots, s_n \in \Lambda$ tales que

$$t\, s_1 \dots s_n =_\beta I$$

- Un término $t \in \Lambda$ es solvable si $\lambda \vec{x}.t$ es solvable.
$\vec{x} = fv(t)$

- Un término $t \in \Lambda$ es unsolvable si no es solvable.

Obs. $t\, s_1 \dots s_n =_\beta I \iff t\, s_1 \dots s_n \twoheadrightarrow I$

Obs. Un término $t \in \Lambda^0$ es solvable si: $\forall t'. \exists n \geq 0\ \exists s_1 \dots s_n.$
$t\, s_1 \dots s_n =_\beta t'.$

$(\Rightarrow)$ $t s_1 \dots s_n t' =_\beta I t' =_\beta t'$

$(\Leftarrow)$ ✓

Lema. $t \in \Lambda$ es solvable si y sólo si existe una instancia de sustitución de t, $t^* \in \Lambda^0$ y existen $n \geq 0$, $s_1 \dots s_n \in \Lambda^0$ tales que

$$t^*\, s_1 \dots s_n =_\beta I$$

$(t^* = t\{x_1 := r_1\}\{x_2 := r_2\} \dots \{x_n := r_n\} \in \Lambda^0)$

$t =_\beta s$
$t\{x := r\} =_\beta s\{x := r\}$

Dem.

$(\Rightarrow)$ Sup. t solvable.
Podemos suponer SPDG que $m < n$

$$(\lambda x_1 \dots x_m.t)\, s_1 \dots s_m \dots s_n =_\beta I$$
$$\shortparallel_\beta$$
$$t\{x_1 := s_1\} \dots \{x_m := s_m\}\, s_{m+1} \dots s_n$$

Y los s_i se pueden elegir cerrados.

$(\Leftarrow)$ Si $t^* s_1 \dots s_n =_\beta I$

$t^* = t\{x_1 := r_1\} \dots \{x_m := r_m\}$
$=_\beta (\lambda x_1 \dots x_m.t) r_1 \dots r_m$

$(\lambda x_1 \dots x_m.t) r_1 \dots r_m s_1 \dots s_n =_\beta I$

Luego t es solvable.

Lema. Para $t \in \Lambda$ arbitrario:

t es solvable sii $\lambda x.t$ es solvable

Dem. t es solvable

sii $t^* s_1 \dots s_n =_\beta I$ para ciertos $s_1, \dots, s_n$

$$= t\{x_1 := r_1\} \dots \{x_m := r_m\}\, s_1 \dots s_n$$

$$=_\beta ((\lambda x_1.t)\, r_1)\{x_2 := r_2\} \dots \{x_m := r_m\}\, s_1 \dots s_n$$

$$= (\lambda x_1.t)\{x_2 := r_2\} \dots \{x_m := r_m\}\, (r_1\{x_2 := r_2\} \dots \{x_m := r_m\})\, s_1 \dots s_n$$

$$= (\lambda x_1.t)^*\, r_1^*\, s_1 \dots s_n$$

Ej. de términos solvable/unsolvable.

- $K = \lambda x.\lambda y.x$ es solvable $\quad KII =_\beta I$
- $S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\, xz(yz)$ es solvable
  $SIII =_\beta II(II) =_\beta I$
- $xI\Omega$ es solvable pues
  $$(\lambda x.xI\Omega)K =_\beta KI\Omega =_\beta I$$
- Ω es unsolvable pues
  $\Omega t_1 \dots t_n =_\beta I$ $\qquad$ si
  $\Omega t_1 \dots t_n \to s$
  entonces
- Ωz es unsolvable $\qquad s = \Omega s_1 \dots s_n$

Lema. Si t es unsolvable, entonces:

1) $\lambda x.t$ es unsolvable
2) $t\,s$ es unsolvable para todo $s \in \Lambda$
3) $t\{x:=s\}$ es unsolvable para toda x, para todo $s \in \Lambda$.

Dem. 1) ✓ 2) Sup. que t es unsolvable, y sup. que ts fuera solvable.

Luego $t^* s^* r_1 \dots r_n =_\beta I$

Luego t es solvable. (Abs.)

3) Sup. que t es unsolvable, y sup. que $t\{x:=s\}$ fuera solvable.

Luego

$$\underbrace{t\{x:=s\}^*}_{\text{también es un } t^*} r_1 \dots r_n =_\beta I$$

Luego t es solvable. (Abs.).

Repaso.

$$\lambda x_1 \dots x_n . \overset{\text{HEAD VARIABLE}}{y}\, t_1 \dots t_m \quad \text{] — HEAD NORMAL FORM}$$

$$\lambda x_1 \dots x_n . \underbrace{(\lambda y.p)\, q}_{\text{HEAD REDEX}}\, t_1 \dots t_m$$

$$\xrightarrow[\text{HEAD REDUCTION}]{h} \lambda x_1 \dots x_n . p\{y:=q\}\, t_1 \dots t_n$$

Teorema. Un término $t \in \Lambda$ tiene HNF ($t =_\beta s$, $s \in HNF$) si y sólo si

$$t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\!\rightarrow \underbrace{s'}_{\substack{\cap \\ HNF}} \dashrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow s.$$

HNF principal de t

(Lo vimos la vez pasada).

Lema. Si $t \xrightarrow{h} s$ entonces $t\{x:=r\} \xrightarrow{h} s\{x:=r\}$.

(Lo habíamos visto).

Lema. 1) t tiene HNF si y sólo si $\lambda x.t$ tiene HNF.

2) Si $t\{x:=s\}$ tiene HNF, entonces t tiene HNF.

3) Si ts tiene HNF, entonces t tiene HNF.

Dem.

1) ($\Rightarrow$) Si t tiene HNF, $t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\!\rightarrow s \in HNF$.

Entonces $\lambda x.t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.s \in HNF$.

($\Leftarrow$) Similar.

2) Sup. que $t\{x:=s\}$ tiene HNF.

Sp. que t no tiene HNF.

Entonces la reducción head de t no termina.

entonces:

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} t_2 \xrightarrow{h} \ldots \quad \text{(infinita)}.$$

entonces $t\{x:=s\} = t_0\{x:=s\} \xrightarrow{h} t_1\{x:=s\} \to \ldots$

(infinita).

(Absurdo, pues la reducción head de $t\{x:=s\}$ debe terminar).

3) Si ts tiene HNF, entonces t tiene HNF.

Sup. que ts tiene HNF, y sup. que t no tiene HNF.

. Hay una reducción head infinita:

$$t = t_0 \xrightarrow{h} t_1 \xrightarrow{h} t_2 \xrightarrow{h} \dots$$

· Consideramos dos casos:

3.1) Si $\nexists i.\ t_i = \lambda x.t_i'$.

Entonces

$$ts = t_0 s \xrightarrow{h} t_1 s \xrightarrow{h} t_2 s \xrightarrow{h} \dots$$

(Abs).

3.2) Si $\exists i.\ t_i = \lambda x.t_i'$

Sea i el mínimo tq. $t_i = \lambda x.t_i'$.

Notar que $\forall j \geq i \quad t_j = \lambda x.t_j'$.

Y además $t_j \xrightarrow{h} t_{j+1}$

$t_j' \xrightarrow{h} t_{j+1}'$.

Entonces:

$$\begin{aligned} ts = t_0 s \xrightarrow{h} t_1 s \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} t_i s &= (\lambda x.t_i')s \\ &\xrightarrow{h} t_i'\{x := s\} \\ &\xrightarrow{h} t_{i+1}'\{x := s\} \\ &\xrightarrow{h} \dots \end{aligned}$$

es una reducción infinita. (Abs.)

Teorema (Wadsworth) Un término es solvable si y sólo si tiene HNF.

Dem. ($\Rightarrow$) Sup. t es solvable.
Entonces

$$\underbrace{\underbrace{t\{x_1:=s_1\}\dots\{x_n:=s_n\}}_{t^*} r_1\dots r_m}_{\text{tiene HNF}} =_\beta I = \lambda x.x$$

- Por lo tanto t^* tiene HNF.
- Por lo tanto t tiene HNF.

} Por el lema anterior.

($\Leftarrow$) Sup. t tiene HNF y veamos que es solvable.
Podemos suponer SPDG que t es cerrado.
Entonces:

$$t =_\beta \lambda x_1\dots x_n.\, \overset{x_i}{y}\, t_1\dots t_m$$

Además t es cerrado, con lo cual $y = x_i$ para algún $i \in 1..n$.

Por lo tanto:

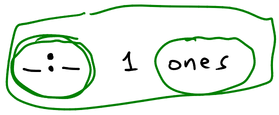
$$t\, x_1\dots x_{i-1} (\lambda y_1\dots y_m.\, I)\, x_{i+1}\dots x_n$$

$$=_\beta (\lambda y_1\dots y_m.\, I)\, t_1'\dots t_m'$$

$$=_\beta I$$

Y por lo tanto t es solvable.

```
ones :: [Int]
ones = 1 : ones
```



Böhm trees

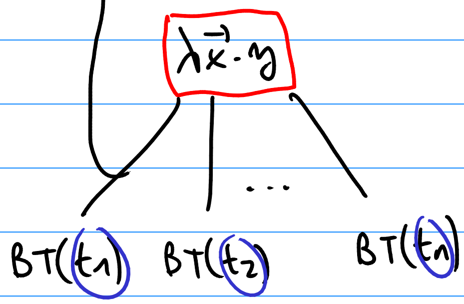
¿Qué es una semántica? $[\![-]\!] : \Lambda \longrightarrow \mathfrak{X}$

tal que si $t =_\beta s$ entonces $[\![t]\!] = [\![s]\!]$.

<u>Idea</u>. A cada término $t \in \Lambda$ le vamos a asignar un árbol posiblemente infinito.

<u>Informalmente</u>:

$BT(t) = \begin{cases} \bot & \text{si } t \text{ es unsolvable} \\ \text{(árbol)} & \text{si } t \text{ es solvable, y su HNF principal es } \boxed{\lambda \vec{x}.y}\, t_1 \ldots t_n \end{cases}$



<u>Obs</u>. • Si t tiene forma normal, t es solvable.

• Si t es unsolvable, no tiene forma normal.

$x\,\Omega$ solvable pero no tiene forma normal

Ej. $S = \overbrace{\lambda xyz.\,x}\,z(yz)$

$$BT(S) = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \lambda xyz.\,x \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ z & & y \arrow[d, dash] \\ & & z \end{tikzcd} \qquad BT(x\Omega) = \begin{tikzcd} x \arrow[d, dash] \\ \perp \end{tikzcd}$$

$$BT(Sa\Omega) = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \lambda z.\,a \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ z & & \perp \end{tikzcd}$$

$$Sa\Omega \xrightarrow{h} (\lambda yz.\,az(yz))\,\Omega \xrightarrow{h} \underbrace{\lambda z.\,a}\,z(\Omega z)$$

$$BT((\lambda x.\,f(xx))(\lambda x.\,f(xx))) = \begin{tikzcd} f \arrow[d, dash] \\ BT((\lambda x.\,f(xx))(\lambda x.\,f(xx))) \end{tikzcd}$$

$$(\lambda x.\,f(xx))(\lambda x.\,f(xx)) \xrightarrow{h} \underbrace{f}\,((\lambda x.\,f(xx))(\lambda x.\,f(xx)))$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, dash] \\ f \arrow[d, dash] \\ f \arrow[d, dash] \\ \vdots \end{tikzcd}$$

$$\Theta M \twoheadrightarrow M(\Theta M)$$

$$YM =_\beta M(YM)$$

$$t = \Theta(\lambda xyz.\, z(xy))\, y$$

$$\xrightarrow{h}\!\!\!\!\twoheadrightarrow (\lambda yz.\, z(\Theta(\lambda xyz.\, z(xy))\, y))\, y$$

$$\xrightarrow{h} \lambda z.\, z(\Theta(\lambda xyz.\, z(xy))\, y)$$

$BT(t) = \lambda z.z$

$\lambda z.z$

$\lambda z.z$

$\lambda z.z$

$\vdots$

El problema de determinar si un término tiene NNF es indecidible.

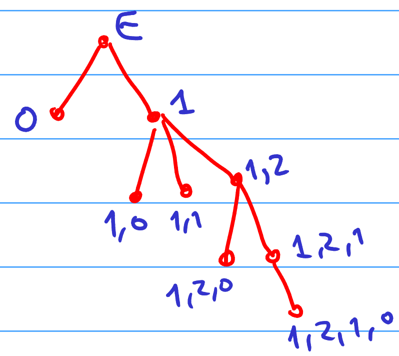
Def. Notamos α a secuencias de naturales.

$$\alpha \in \mathbb{N}^*$$

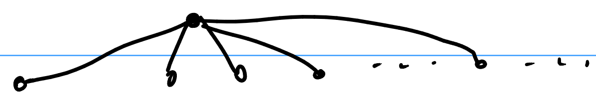
Def. Un conjunto $T \subseteq \mathbb{N}^*$ es un árbol si:

1) si $(n_1, \dots, n_k, m) \in T$
entonces $(n_1, \dots, n_k) \in T$.

2) si $(n_1, \dots, n_k, m+1) \in T$
entonces $(n_1, \dots, n_k, m) \in T$.



Ej. $T = \{\epsilon, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

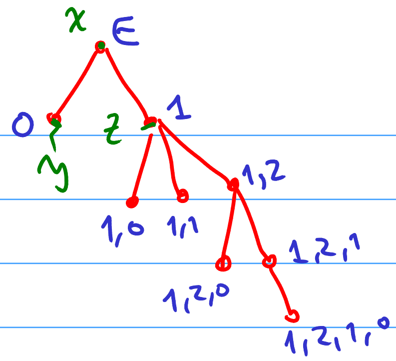


Finitely branching

Def. Si Σ es un conjunto, un <u>árbol Σ-etiquetado</u> es una función parcial

$$\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \Sigma$$

tal que $\{\alpha \in \mathbb{N}^* \mid \varphi(\alpha)\downarrow\}$ es un árbol.



Def (formal) Böhm tree. $\Sigma = \{\bot\} \cup \{\lambda x_1 \dots x_n . y \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n, y \text{ variables}\}$

Un Böhm tree es un árbol Σ-etiquetado definido así:

$$BT(t)(\epsilon) = \begin{cases} \bot & \text{si } t \text{ es unsolvable} \\ \lambda x_1 \dots x_n . y & \text{si } t \text{ es solvable, y su hnf ppal. es } \boxed{\lambda x_1 \dots x_n . y}\, t_1 \dots t_m \end{cases}$$

$$BT(t)(\underbrace{i}_{i \in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\alpha}_{\alpha \in \mathbb{N}^*}) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } t \text{ es unsolvable} \\ BT(t_i)(\alpha) \quad \text{si } i < n \\ \uparrow \quad \text{si } i \geq n & \text{si } t \text{ es solvable y su hnf ppal es } t = \lambda \vec{x}. y\, t_0 \dots t_{n-1} \end{cases}$$

Teorema. Si $t =_\beta s$ entonces $BT(t) = BT(s)$.

Dem. por inducción en α se puede ver que

$$BT(t)(\alpha) = BT(s)(\alpha).$$