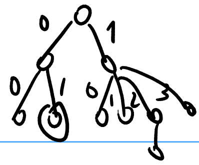
BÖHM TREE



Def. El Böhm tree de $t \in \Lambda$ es una función parcial $BT(t) : \mathbb{N}^* \to \Sigma$

$$\Sigma = \{\bot\} \cup \{\lambda x_1 \dots x_n . y \mid n \geq 0,\ x_1, \dots, x_n, y \text{ variables}\}.$$

Además,

$$\begin{cases} BT(t)(n_1, \dots, n_k, m)\downarrow \implies BT(t)(n_1, \dots, n_k)\downarrow \\ BT(t)(n_1, \dots, n_k, m+1)\downarrow \implies BT(t)(n_1, \dots, n_k, m)\downarrow . \end{cases}$$

Se calcula así por inducción en α:

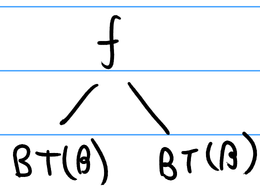
$$BT(t)(\epsilon) = \begin{cases} \bot & \text{si } t \text{ unsolvable} \\ \lambda x_1 \dots x_n . y & \text{si } t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\to \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1} \end{cases}$$

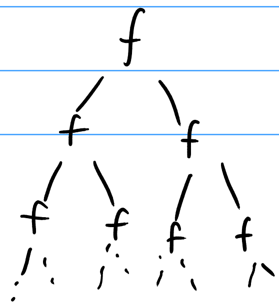
$$BT(t)(i \cdot \alpha) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } t \text{ unsolvable} \\ BT(t_i)(\alpha) & \text{si } t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\to \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1},\ 0 \leq i < m \\ \uparrow & i \geq m \end{cases}$$

Ej. $\underbrace{\Theta(\lambda x. xx)}_{A} \twoheadrightarrow AA \to AAA \to AAAA \to \dots$

$$BT(A) = \bot$$

$$\underbrace{\Theta(\lambda x. f(xx))}_{B} \xrightarrow{h}\!\!\!\!\to f(BB)$$

$BT(B) =$ 

$=$ 

$BT : \Lambda \longrightarrow$ Árbol

<u>Teorema</u>. Si $t =_\beta s$ entonces $BT(t) = BT(s)$.

<u>Dem</u>. Por inducción en $|\alpha|$ donde $\alpha \in \mathbb{N}^*$, vamos a ver que $BT(t)(\alpha) = BT(s)(\alpha)$.

- Si $|\alpha| = 0$, $\alpha = \epsilon$.

  - Primero, observemos que t es solvable $\iff$ s es solvable.

  - Si t, s son unsolvable, $BT(t)(\epsilon) = \bot = BT(s)(\epsilon)$ ✓
  - Si t, s son solvable,

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, equal, "\beta"'] & \lambda x_1 \ldots x_n . y\, t_0 \ldots t_{m-1} \arrow[dr, two heads] \arrow[d, phantom, "(CR)"] & \\
& & \lambda x_1 \ldots x_n . y\, r_0 \ldots r_{m-1} \\
s \arrow[r, two heads, "h"] & \lambda x_1 \ldots x_{n'} . y'\, s_0 \ldots s_{m'-1} \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

$$n = n' \qquad y = y' \qquad t_i =_\beta s_i \quad \forall i \in 0..m-1$$

$$BT(t)(\epsilon) = \lambda x_1 \ldots x_n . y = BT(s)(\epsilon).$$

- Si $|\alpha| > 0$, $\alpha = i \cdot \beta$.

  - Si t, s son unsolvable, $BT(t)(i \cdot \beta) = \uparrow = BT(s)(i \cdot \beta)$.
  - Si t, s son solvable, • si $0 \leq i < m$

$$BT(t)(i \cdot \beta) = BT(t_i)(\beta) \underset{\text{Por HI}}{=} BT(s_i)(\beta) = BT(s)(i \cdot \beta).$$

  - si $i \geq m$, $BT(t)(i \cdot \beta) = \uparrow = BT(s)(i \cdot \beta)$. //

$\lambda x. x(y(\lambda z.z))$

Técnica Böhm-out

Idea. Dado un término (en forma normal), todos sus subtérminos se pueden "extraer".

Ejemplo.

1) $x\,a\,\Omega\,b$

$$(x\,a\,\Omega\,b)\{x := \lambda xyz.x\} = (\lambda xyz.x)\,a\,\Omega\,b \twoheadrightarrow a$$

2) $x\,a\,(y\,b\,c)$

$$(x\,a\,(y\,b\,c))\{x := \overbrace{\lambda xy.y}^{K^*}\}\{y := \overbrace{\lambda xy.x}^{K}\} = K^*\,a\,(K\,b\,c) \twoheadrightarrow K\,b\,c \twoheadrightarrow b$$

3) $x\,a\,(x\,b\,c)$

$$(x\,a\,(x\,b\,c))\{x := \lambda xyf.fxy\}\,K^*\,K$$
$$\twoheaddownarrow$$
$$(\lambda f.f\,a\,(\lambda f.f\,b\,c))\,K^*\,K$$
$$\twoheaddownarrow$$
$$K^*\,a\,\underbrace{(\lambda f.f\,b\,c)}\,K$$
$$\twoheadrightarrow (\lambda f.f\,b\,c)\,K \to K\,b\,c \twoheadrightarrow b$$

Def. 1) Una HNF $\lambda x_1 \dots x_n . y\, t_1 \dots t_m$ es **λ-free** si $n = 0$.

2) Una HNF $\lambda x_1 \dots x_n . y\, t_1 \dots t_m$ es **head-original** si $y \notin fv(t_1, \dots, t_m)$.

3) Un término $t \in \Lambda$ está **listo** si es unsolvable ó su HNF principal es λ-free y head-original.

Def. Dado $t \in \Lambda$ y $\alpha \in \mathbb{N}^*$ t.q. $BT(t)(\alpha)\downarrow$ se define t_α así:

$$t_\epsilon := t$$

$$t_{(i \cdot \alpha)} := (t_i)_\alpha \qquad \text{si } t \overset{h}{\twoheadrightarrow} \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1}$$

Ej. $t = z(x \Omega y)$

$t_\epsilon = z(x \Omega y)$

$t_0 = x \Omega y$

$t_{00} = (x \Omega y)_0 = \Omega_\epsilon = \Omega$

$t_{01} = (x \Omega y)_1 = y_\epsilon = y$

Def. • Una **transformación elemental** es una función $f : \Lambda \to \Lambda$ definida de alguna de estas dos maneras:

1) $f(t) = t\,s$ para algún $s \in \Lambda$

2) $f(t) = t\{x := s\}$ para ciertos $x, s \in \Lambda$.

• Una **transformación de Böhm** es una composición de transformaciones elementales.

Notación: π

$t^\pi = \pi(t)$.

Lema. Si $t \in \Lambda$, existe una T.B. π tq. t^{π} está listo.

Dem.

- Si t es unsolvable, ya está listo.
- Si t es solvable, $t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y \, t_0 \dots t_{m-1}$

$$(t\, x_1 \dots x_n)\{y := \lambda x_0 \dots x_{m-1} . \lambda f . f x_0 \dots x_{m-1}\}\, a$$

$$\twoheadrightarrow (y\, t_0 \dots t_{m-1})\{y := \lambda x_0 \dots x_{m-1} . \lambda f . f x_0 \dots x_{m-1}\}\, a$$

$$= ((\lambda x_0 \dots x_{m-1} . \lambda f . f x_0 \dots x_{m-1})\, t_0^* \dots t_{m-1}^*)\, a$$

$$\twoheadrightarrow (\lambda f . f\, t_0^* \dots t_{m-1}^*)\, a \longrightarrow a\, t_0^* \dots t_{m-1}^*$$

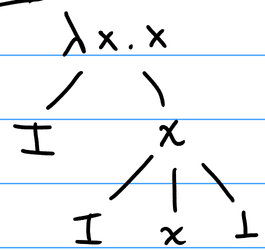
está listo.

$$t_i^* = t_i\{y := \dots\}$$

Esta construcción podría "mezclar" los subárboles de un término.

Ej. $t = \lambda x . x I (x I y \Omega)$

$BT(t)$:



$$(t x)\{x := \underbrace{\lambda y z . \lambda f . f y z}_{U_2}\}\, a$$

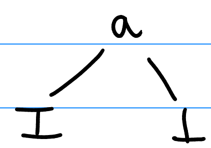
$$\downarrow$$

$$(x I (x I y \Omega))\{x := U_2\}\, a$$

$$= U_2 I (U_2 I y \Omega)\, a$$

$$\twoheadrightarrow a I (U_2 I y \Omega) \twoheadrightarrow a I (\Omega I y)$$

$BT(t^{\pi})$:



Lema. Si $t \in \Lambda$ y $\alpha \in BT(t)$, entonces

existe una T.B. π tq. t^π está listo

y además $(t^\pi)_\alpha = (t_\alpha)^*$.

(instancia de sustitución).

Dem.
- Si t es unsolvable, ya está listo.
- Si t es solvable, $t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1}$

Considerar el K más grande tal que y aparece con K argumentos en algún nodo del Böhm tree hasta el nivel $|\alpha|$.

$$K := \max\{ k \mid BT(t)(\beta) = \lambda \vec{x}. y\, u_1 \dots u_k ,\ |\beta| \leq |\alpha| \}.$$

$$(t\, x_1 \dots x_n)\{y := \lambda x_0 \dots x_{m-1} \dots x_{K-1} f.\ f x_0 \dots x_{K-1}\}\, a_m \dots a_{K-1}\, b$$

- Veamos su efecto:

$$t^\pi \twoheadrightarrow (y\, t_0 \dots t_{m-1})\{y := U_K\}\, a_m \dots a_{K-1}\, b$$
$$= U_K\, t_0^* \dots t_{m-1}^*\, a_m \dots a_{K-1}\, b$$
$$= b\, t_0^* \dots t_{m-1}^*\, a_m \dots a_{K-1}$$

está listo.

- Para toda $\beta \in \mathbb{N}^*$, $|\beta| \leq |\alpha|$.

$t_\beta = \lambda \vec{z}. w$

$s_1 \quad \dots \quad s_p$

- Si $w \neq y$: $(t^\pi)_\beta = \lambda \vec{z}. w$

$s_1^* \quad \dots \quad s_p^*$

- Si $w = y$: $(t^\pi)_\beta = \lambda \vec{z}. \lambda y_{p+1} \dots y_{K-p+1} . \lambda f. f$

$p \leq K$

$s_1^* \quad \dots \quad s_p^* \quad y_{p+1} \quad \dots \quad y_{K-p+1}$

<u>Proposición</u> (Técnica Böhm out).

Si $t \in \Lambda$ y $\alpha \in BT(t)$, existe una T.B. π tq.

$$t^{\pi} =_{\beta} (t_{\alpha})^{*}.$$

<u>Dem.</u>

Por ind. en α.

- Si $\alpha = \epsilon$, tomar $\pi := id.$ $\quad t = t$ ✓

- Si $\alpha = i \bullet \beta$, entonces $t \xrightarrow{h}\!\!\twoheadrightarrow \lambda x_1 \ldots x_n . y\, t_0 \ldots t_{m-1}.$

$$\Downarrow \pi_1$$

$$b\, t_0^{*} \ldots t_{m-1}^{*}\, a_m \ldots a_{K-1}$$

$$\Downarrow\ b\{\lambda x_0 \ldots x_{K-1} . x_i\} \overset{\shortparallel}{\pi_2}$$

$$t_i^{*}$$

$$((t^{\pi_1})^{\pi_2})^{\pi_3} = (t_i^{*})^{\pi_3}$$

$$= ((t_i^{*})_{\beta})^{*}$$

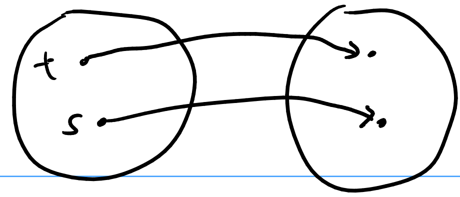
$$\overset{?}{=} (t_{i \bullet \beta})^{*}$$

REVISAR.
Prop. 10.3.7, p. 248.

- Esto $(t^{*})_{\alpha} = (t_{\alpha})^{*}$ no vale en general.

$\uparrow = z_0 = ((x\, y)\{x := Kz\})_0 \neq (x\, y)_0\{x := Kz\} = y\{x := Kz\} \overset{\shortparallel}{y}$

- Pero creo que sí vale con el tipo de sustituciones de la construcción de arriba.



Separabilidad

Idea. Dos términos $t, s \in \Lambda$ son "separables" si se puede definir una función que los asocia a distintas imágenes.

Def. $t \sim s$ vale si (1) t, s son unsolvable

ó (2) t, s son solvable y

$$t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1}$$

$$s \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_{n'} . y'\, s_0 \dots s_{m'-1}$$

donde $y = y'$ $\quad n - m = n' - m'$

Lema. 1) Si $t \not\sim s$, t, s son solvable, entonces $\forall p, q \in \Lambda \;\exists \pi .\; t^{\pi} =_{\beta} p \;\wedge\; s^{\pi} =_{\beta} q$.

2) Si $t \not\sim s$, t solvable, entonces $\forall p \in \Lambda \;\exists \pi .\; t^{\pi} =_{\beta} p$ y s^{π} es unsolvable.

Dem. Si $t \not\sim s$, t, s son solvable, entonces

1) $\forall p, q \in \Lambda \;\exists \pi .\; t^{\pi} =_{\beta} p \;\wedge\; s^{\pi} =_{\beta} q$.

Como t, s son solvable pero $t \not\sim s$, $\quad t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y\, t_0 \dots t_{m-1}$

$$s \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_{n'} . y'\, s_0 \dots s_{m'-1}$$

Hay dos casos, dependiendo de si $y \neq y' \wedge n - m = n' - m'$

ó $\quad n - m \neq n' - m'$

Caso 1.1) Si $y \neq y' \wedge n - m = n' - m'$

$t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y t_0 \dots t_{m-1}$ sup. spdg. $n \geq n'$

$s \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_{n'} . y' s_0 \dots s_{m'-1}$

$$\begin{array}{ll}
t & s \\
\Downarrow \square x_1 \dots x_n & \Downarrow \square x_1 \dots x_n \\
y \underbrace{t_0 \dots t_{m-1}}_{m} & y' \underbrace{s_0 \dots s_{m'-1} x_{n'+1} \dots x_n}_{m'+n-n'} \\
\Downarrow \square \{y := \lambda z_1 \dots z_m . p\} & \Downarrow \square \{y := \lambda z_1 \dots z_m . q\} \\
p & q
\end{array}$$

<u>Caso 1.2)</u> $n - m \neq n' - m'$

$t \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_n . y t_0 \dots t_{m-1}$ spdg. $n \geq n'$

$s \xrightarrow{h}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x_1 \dots x_{n'} . y' s_0 \dots s_{m'-1}$

$$\begin{array}{ll}
t & s \\
\Downarrow \square x_1 \dots x_n & \Downarrow \square x_1 \dots x_n \\
y \underbrace{t_0 \dots t_{m-1}} & y' \underbrace{s_0 \dots s_{m'-1} x_{n'+1} \dots x_n}_{s_0 \dots s_{m-1} \dots s_{m+k-1}} \\
\Downarrow \{y, y' := \lambda z_1 \dots z_{m+k} . I\} & \Downarrow \\
\lambda z_{m+1} \dots z_{m+k} . I & I \\
\Downarrow \square a b_1 \dots b_k & \Downarrow \square a b_1 \dots b_k \\
b_k & a b_1 \dots b_k \\
\Downarrow \{b_k := p, a := \lambda x_1 \dots x_k . q\} & \Downarrow \\
p & q
\end{array}$$

Teorema (separabilidad)

Si $t, s \in \Lambda$ son formas normales,

$\forall p, q \in \Lambda \ \exists \pi . \quad t^{\pi} =_{\beta} p \qquad s^{\pi} =_{\beta} q .$