Lógica intuicionista

Informal:

plato.stanford.edu

1) Si uno demostró

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.\ \det(A)\neq 0 \rightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}.\ A\cdot B = I$$

¿eso nos da un algoritmo?

Las demostraciones "constructivas" son las que dan un algoritmo.
Las demostraciones de existenciales exhiben un testigo de existencia.

2) El intuicionismo surgió por Brouwer.

- Rechazar el principio del tercero excluido $A \vee \neg A$.

$$HC \vee \neg HC$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x := \text{if } HC \\ \quad\quad \text{then } 1 \\ \quad\quad \text{else } 0 \end{array}} : \mathbb{N}$$

- Rechazar ese principio lleva a rechazar otros principios.

- Tercero excluido $\quad A \vee \neg A$
- Ley de Peirce $\quad ((A \to B) \to A) \to A$
- De Morgan $\quad \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$
- Consequentia Mirabilis $\quad (\neg A \to A) \to A$
- Doble negación $\quad \neg\neg A \to A$
- $\neg \forall x. P(x) \to \exists x. \neg P(x)$
- Contrarrecíproca $\quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Mnemotecnia

- A es más fuerte que $\neg\neg A$
- $A \vee B$ es más fuerte que $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $\exists x. P(x)$ es más fuerte que $\neg \forall x. \neg P(x)$.

Si A vale clásicamente, $\neg\neg A$ vale en lógica intuicionista.

Ejemplos.

1) Existen x, y irracionales tq. x^y es racional.

Dem. (No constructiva).

- Sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional.
- Por tercero excluido, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ o bien es racional o bien es irracional,
  - Si es racional, ✓
  - Si es irracional, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2} = 2$ racional.

---

2) - Un número $x \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x]$ $p \neq 0$ tal que $p(x) = 0$.
- Un número $x \in \mathbb{R}$ es trascendente si no es algebraico.

$x^2 - 2 = 0$ $\sqrt{2}$ algebraico.

No todos los números son algebraicos.

Dem [no constructiva]. Existen números trascendentes.

Observar que $\mathbb{Z}[x]$ es numerable.
Y cada $p \in \mathbb{Z}[x]$ tiene finitas raíces.
Hay a lo sumo numerables números algebraicos.

$\neg \forall x \in \mathbb{R}.\ x \in \text{Algebraico}$

$[\exists x \in \mathbb{R}.\ \neg(x \in \text{Algebraico})$

3) $P(x)$: "padezco x"

$CP(x)$: "creo que padezco x"

H : "hipocondría"

$$P(H) \longleftrightarrow \exists x.\ CP(x) \wedge \neg P(x).$$

<u>Lema</u>. $CP(H) \longrightarrow P(H)$

<u>Dem</u>. (No constructiva).

Supongamos que $CP(H)$.

Por tercero excluido $P(H) \vee \neg P(H)$.

1) Si $P(H)$, ✓

2) Si $\neg P(H)$, tendría que $CP(H) \wedge \neg P(H)$, y por el axioma $P(H)$.

Este caso es imposible.

---

4) En lógica intuicionista la noción de igualdad entre números reales $x, y \in \mathbb{R}$ no es muy buena.

$$x = y \quad \leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}.\ |x-y| < \frac{1}{n}$$

$$x \neq y \quad \leftrightarrow \quad \neg \forall n \in \mathbb{N}.\ |x-y| < \frac{1}{n}$$

$$\not\Updownarrow$$

$$\underbrace{x \# y}_{\text{apartness}} \quad \longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}.\ |x-y| \geq \frac{1}{n} \qquad\qquad x \equiv y \leftrightarrow \neg(x \# y)$$

Bishop, Constructive Analysis.

Sea X <u>no vacío</u>. $\qquad$ X vacío $\Leftrightarrow \forall x.\ x \notin X$.

Sea X habitado.

$$\neg \forall x.\ x \notin X$$

$$\not\Updownarrow$$

$$\exists x.\ x \in X$$

Teoría de tipos intuicionista

$$\forall x \in X.\ \exists y \in Y.\ P(x,y) \to \exists f \in (X \to Y).\ \forall x \in X.\ P(x, f(x))$$

una versión del A.C.

Interpretación Brouwer—Heyting—Kolmogorov (BHK)

- Rechaza la idea de "Verdad".
- Enfocarse en la noción de "demostrabilidad".

$$A ::= \alpha \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \to B \mid \bot$$

Abreviaturas:

$\neg A := A \to \bot$

$\top := \bot \to \bot$

$(A \leftrightarrow B) := (A \to B) \wedge (B \to A)$

- Tener una demostración de $A \wedge B$ es tener un par (p,q) donde p es una dem. de A y q es una dem. de B.
- Tener una dem. de $A \vee B$ es tener un par (i,p) donde i es un indicador, $i \in \{1,2\}$ y además,
$$\begin{cases} \text{si } i=1, & p \text{ es una dem. de } A \\ \text{si } i=2, & p \text{ es una dem. de } B. \end{cases}$$
- Tener una dem. de $A \to B$ es tener un método/mecanismo/función que dada una demostración de A, la transforma en una dem. de B.
- No hay demostraciones de $\bot$.

Gentzen 193*

Deducción Natural para Lógica Intuicionista.

$A ::= \alpha \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \to B \mid \bot$

Vamos a tener juicios de la forma

$$\Gamma \vdash A$$

$\Gamma, \Delta = \Gamma \cup \Delta$

donde Γ es un conjunto finito de fórmulas.

$A_1, \ldots, A_n \vdash B$ "$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$"

Los juicios derivables se definen a través de las siguientes reglas:

$\wedge, \vee, \to$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,Ax \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\wedge E_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\wedge E_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee I_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee I_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\vee E$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\to E$$

$\boxed{\text{teorema de la deducción}}$

modus ponens

principio de explosión (ex falso quodlibet)

$\bot$ no tiene reglas de introducción

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot E \qquad (\forall A)$$

Fuzzy logics. $[0,1]$

$$[\![A \wedge B]\!] = \text{máx}\{[\![A]\!], [\![B]\!]\}.$$

Ejemplos

1) $\vdash A \to A$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{\vdash A \to A}\;\to I$$

2) $\vdash A \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,Ax}{A \vdash B \to A}\;\to I}{\vdash A \to (B \to A)}\;\to I$$

$(\nvdash \neg\neg A \to A)$

3) $\vdash A \to \neg\neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash \neg A}\,Ax \qquad \dfrac{}{A, \neg A \vdash A}\,Ax}{A, \neg A \vdash \bot}\;\to E}{A \vdash \neg\neg A}\;\to I}{\vdash A \to \neg\neg A}\;\to I$$

$\neg X = X \to \bot$

$$\dfrac{\begin{array}{c} ? \\ \neg\neg A \vdash A \end{array}}{\vdash \neg\neg A \to A}\;\to I$$

4) $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg A \to \bot}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \neg A}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash A}\,\text{Ax}}{\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \bot}\,\to E}{\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg A}\,\to I}{\neg\neg\neg A, A \vdash \bot}\,\to E}{\neg\neg\neg A \vdash \neg A}\,\to I}{\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A}\,\to I$$

$\neg\neg\neg A$

$\neg\neg A = (\neg A) \to \bot$

5) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to B, \neg B, A \vdash \neg B}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B, \neg B, A \vdash A \to B}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{A \to B, \neg B, A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \to B, \neg B, A \vdash B}\,\to E}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}\,\to E}{\dfrac{A \to B, \neg B \vdash \neg A}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}\,\to I}\,\to I}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\,\to I$$

Leyes de De Morgan

$$\neg(A\wedge B) \rightleftarrows (\neg A \vee \neg B)$$
$$\neg(A\vee B) \rightleftarrows (\neg A \wedge \neg B)$$

6) $\neg A\vee\neg B \vdash \neg(A\wedge B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A\vee\neg B, A\wedge B\vdash \neg A\vee\neg B}\,Ax \qquad \overset{(*)_1}{\neg A\vee\neg B, A\wedge B, \neg A\vdash\bot} \qquad \overset{(*)_2}{\neg A\vee\neg B, A\wedge B,\neg B\vdash\bot}}{\neg A\vee\neg B, A\wedge B\vdash\bot}\,\vee E}{\neg A\vee\neg B\vdash\neg(A\wedge B)}\,\to I$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A\wedge B}\,Ax}{\Gamma\vdash A}\,\wedge E_1}{\underbrace{\neg A\vee\neg B,\ A\wedge B,\ \neg A}_{\Gamma}\vdash\bot}\,\to E$$

7) $\neg(A\vee B)\vdash\neg A\wedge\neg B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee B), A\vdash\neg(A\vee B)}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee B), A\vdash A}\,Ax}{\neg(A\vee B), A\vdash A\vee B}\,\vee I_1}{\neg(A\vee B), A\vdash\bot}\,\to E}{\neg(A\vee B)\vdash\neg A}\,\to I \qquad \overset{\text{simétrica}}{\neg(A\vee B)\vdash\neg B}}{\neg(A\vee B)\vdash\neg A\wedge\neg B}\,\wedge I$$

8) $A \wedge B \vdash B \wedge A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\wedge B \vdash A\wedge B}\,Ax}{A\wedge B\vdash B}\,\wedge E_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\wedge B\vdash A\wedge B}\,Ax}{A\wedge B\vdash A}\,\wedge E_1}{A\wedge B\vdash B\wedge A}\,\wedge I$$

9) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

simétrica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A\wedge\neg B, A\vee B\vdash A\vee B}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash \neg A\wedge\neg B}\,Ax}{\Gamma\vdash\neg A}\,\wedge E_1 \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash A}\,Ax}{\underbrace{\neg A\wedge\neg B, A\vee B, A}_{\Gamma}\vdash\bot}\,\to E \qquad \neg A\wedge\neg B, A\vee B, B\vdash\bot}{\neg A\wedge\neg B, A\vee B\vdash\bot}\,\vee E}{\neg A\wedge\neg B\vdash\neg(A\vee B)}\,\to I$$

$\nvdash A \vee \neg A$

10) $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\vee\neg A)}\,\text{Ax}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee\neg A),A\vdash\neg(A\vee\neg A)}\,\text{Ax}\qquad\dfrac{\dfrac{}{\neg(A\vee\neg A),A\vdash A}\,\text{Ax}}{\neg(A\vee\neg A),A\vdash A\vee\neg A}\,\vee I_1}{\neg(A\vee\neg A),A\vdash\bot}\,\to E}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg A}\,\to I}{\neg(A\vee\neg A)\vdash A\vee\neg A}\,\vee I_2}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\bot}\,\to E}{\vdash\neg\neg(A\vee\neg A)}\,\to I$$

Lema. (Weakening). (Resultado meta-teórico).

Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash A$

entonces $\Delta \vdash A$.

Dem. Por inducción en la derivación del juicio $\Gamma \vdash A$.

Lema. (Sustitución).

Si $\Gamma \vdash A$ entonces $\Gamma\{\alpha := B\} \vdash A\{\alpha := B\}$.

Ej: $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$

en particular $\alpha := A \vee \neg B$

$\vdash (A \vee \neg B) \to (\beta \to (A \vee \neg B))$