Semántica algebraica

$$A \to (B \to A)$$

$$\vdots$$

$$\frac{A \vdash B \to A}{\vdash A \to (B \to A)}$$

CORRECTITUD

COMPLETITUD

A	B	$A \to (B \to A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En lógica clásica, uno podría interpretar las variables proposicionales como elementos de un álgebra de Boole.

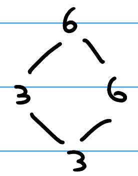
Def. Un orden parcial $(X, \leq)$ es un reticulado (lattice) si para todo par de elementos $x, y \in X$

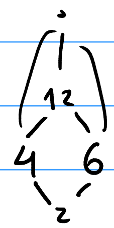
- existe una cota superior mínima (supremo) de $\{x, y\}$ — $x \sqcup y$ (join)
- existe una cota inferior máxima (ínfimo) de $\{x, y\}$ — $x \sqcap y$ (meet)

$$\forall x, y \in X\ \exists z \in X.\ (x \leq z \wedge y \leq z)$$
$$\wedge (\forall z' \in X.\ (x \leq z' \wedge y \leq z') \to z \leq z')$$

Ej. de reticulados:

- $(\mathbb{N}, \leq, \min, \max)$
- $(\mathbb{N}, |, \gcd, \operatorname{lcm})$
- $(\{0,1\}, \leq, \&, |)$
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$ — X cjto. arbitrario





Def. · Un reticulado es distributivo si $\sqcap$ y $\sqcup$ distribuyen, es decir:

$\forall x, y, z \in X.$

$$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$$

$$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z).$$

- Un reticulado tiene bottom si existe un elemento $0 \in X$ tq. $\forall x \in X.\ 0 \leq x$.
- top, $1 \in X$ tq. $\forall x \in X.\ x \leq 1$

Lema. Son equivalentes, en un reticulado:

1) $x \leq y$
2) $x = x \sqcap y$
3) $y = x \sqcup y$

Dem.

$(1 \Rightarrow 2)$ Si $x \leq y$, entonces x es el ínfimo de $\{x, y\}$, pues

$x \leq x \quad , \quad x \leq y \qquad$ (es cota inferior)

y además, si $\quad z \leq x \quad , \quad z \leq y$

entonces $\quad z \leq x$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si $x = x \sqcap y$ entonces $x = x \sqcap y \leq y$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$ Parecido.

Lema.
- $a \overset{\sqcap}{\sqcup} a = a$ (idempotencia)
- $a \overset{\sqcap}{\sqcup} b = b \overset{\sqcap}{\sqcup} a$ (conmutatividad)
- $a \overset{\sqcap}{\sqcup} (b \overset{\sqcap}{\sqcup} c) = (a \overset{\sqcap}{\sqcup} b) \overset{\sqcap}{\sqcup} c$ (asociatividad)
- $(a \overset{\sqcap}{\sqcup} b) \overset{\sqcup}{\sqcap} a = a$

Dem.

- $\underline{a \sqcup b = b \sqcup a}$

Sabemos: $\quad a \leq a \sqcup b$

$\qquad\qquad\quad b \leq a \sqcup b$

entonces $\quad a \sqcup b$ es cota sup. de $\{a, b\}$.

Entonces $\quad b \sqcup a \leq a \sqcup b$.

Simétricamente $\quad a \sqcup b \leq b \sqcup a$. Por antisimetría, $a \sqcup b = b \sqcup a$.

Def. Si un reticulado tiene bottom y top, dado un elemento $x \in X$, $y \in X$ es un complemento de x si

$$x \sqcup y = 1$$
$$x \sqcap y = 0$$

El complemento de x, si existe, se nota x.

Lema. Si x tiene un complemento, en un reticulado distributivo es único.

Dem. Sup. que hubiera dos complementos $y, y' \in X$:

$$x \sqcup y = 1 \qquad x \sqcup y' = 1$$
$$x \sqcap y = 0 \qquad x \sqcap y' = 0$$

Por lo tanto:

$$y' = \underbrace{(x \sqcup y)}_{1} \sqcap y' = \underbrace{(x \sqcap y')}_{0} \sqcup (y \sqcap y') = y \sqcap y'$$

$y' = y \sqcap y'$ Por lo tanto $y' \leq y$.

Simétricamente $y \leq y'$.

Lema. $--x = x$

Dem. Notar que $--x$ es complemento de $-x$

x es complemento de $-x$.

Por lo tanto $--x = x$.

Def. Un álgebra de Boole $\mathcal{B} = \langle B, \leq, \sqcup, \sqcap, 0, 1, - \rangle$ es un reticulado que tiene bottom, top y complementos.

$$A ::= \alpha \mid \bot \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A \qquad \neg A = A \to \bot$$
$$\top = \bot \to \bot$$

Dada una función $v : Var \longrightarrow B$ (valuación)

$Var = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

definimos el valor de una fórmula bajo v así: en lógica clásica

$$[\![\alpha]\!]_v = v(\alpha)$$
$$[\![\bot]\!]_v = 0$$
$$[\![A \wedge B]\!]_v = [\![A]\!]_v \sqcap [\![B]\!]_v$$
$$[\![A \vee B]\!]_v = [\![A]\!]_v \sqcup [\![B]\!]_v$$
$$[\![A \to B]\!]_v = -[\![A]\!]_v \sqcup [\![B]\!]_v$$

Correctitud y Completitud

Teorema. En lógica clásica $\vdash A$
si y sólo si en toda álgebra de Boole
y para toda valuación v, $[\![A]\!]_v = 1$.

Álgebra de Lindenbaum

Idea. La implicación en lógica intuicionista se comporta "casi" como una relación de orden.

Lema. 1) $\Gamma \vdash A \to A$ — Reflexiva

2) Si $\Gamma \vdash A \to B$ y $\Gamma \vdash B \to C$ entonces $\Gamma \vdash A \to C$. — Transitiva

Dem.

1)
$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,Ax}{\Gamma \vdash A \to A}\,{\to}I$$

2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash B \to C \ \checkmark}{\Gamma, A \vdash B \to C}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \ \checkmark}{\Gamma, A \vdash A \to B}\,W \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,Ax}{\Gamma, A \vdash B}\,{\to}E}{\Gamma, A \vdash C}\,{\to}E}{\Gamma \vdash A \to C}\,{\to}I$$

La implicación no es antisimétrica.

$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$$

Def. Dado un contexto Γ, decimos que $A \sim_\Gamma B$ si

$$\Gamma \vdash \underbrace{A \leftrightarrow B}_{(A \to B) \wedge (B \to A)} .$$

Notamos $[A]_{\sim_\Gamma} = [A] = \{B \mid A \sim_\Gamma B\}$.

Definimos:

$[A] \leq [B]$ si y sólo si $\Gamma \vdash A \to B$.

Está bien definida, es decir:

$$\begin{array}{ccc} [A] & \leq & [B] \\ \| & & \| \\ [A'] & & [B'] \end{array}$$

$\Gamma \vdash A \leftrightarrow A'$

$\Gamma \vdash B \leftrightarrow B'$

$\Gamma \vdash A \to B$

entonces $[A'] \leq [B']$,

$\Gamma \vdash A' \to B'$

Además $\leqslant$ es una relación de orden:

1) Reflexiva. $[A] \leqslant [A]$ $\quad \Gamma \vdash A \to A$

2) Transitiva.

si $[A] \leqslant [B]$ y $[B] \leqslant [C]$

entonces $[A] \leqslant [C]$ $\quad$ pues si $\Gamma \vdash A \to B$ $\quad \Gamma \vdash B \to C$

entonces $\Gamma \vdash A \to C$.

3) Antisimétrica.

si $[A] \leqslant [B]$ y $[B] \leqslant [A]$

entonces

$\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash B \to A$

entonces

$\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$ o sea que $A \sim_\Gamma B$

y $[A] = [B]$.

Tenemos una estructura para cada Γ fijo:

$$\mathcal{L}_\Gamma = (X, \leqslant, \sqcap, \sqcup, 0, 1, \underbrace{\Rightarrow}_{\text{No tiene complementos}})$$

pero tiene complementos relativos.

$X = \{[A] \mid A \text{ fórmula}\}$

No es un álgebra de Boole.

Tiene ínfimos:

$$[A] \sqcap [B] = [A \wedge B]$$

$\Gamma \vdash A \wedge B \to A$

$\Gamma \vdash A \wedge B \to B$

Notar que está bien definido, es decir que

$[A] = [A']$ y $[B] = [B']$

entonces $[A] \sqcap [B] = [A'] \sqcap [B']$.

$\Gamma \vdash A \leftrightarrow A'$ y $\Gamma \vdash B \leftrightarrow B'$

$\Gamma \vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (A' \wedge B')$.

$\Gamma \vdash C \to A$

$\Gamma \vdash C \to B$ $\quad \Rightarrow \Gamma \vdash C \to (A \wedge B)$

$\Gamma \vdash A \to A \vee B$

$\Gamma \vdash B \to A \vee B$

Y supremos:

$$[A] \sqcup [B] = [A \vee B]$$

$\Gamma \vdash A \to C \quad \Gamma \vdash B \to C$

$\Gamma \vdash (A \vee B) \to C$

Tiene bottom:

$$0 = [\bot] \qquad \Gamma \vdash \bot \to A$$

$$[\bot] \leq [A]$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot E$$

Observación: $A \in [\bot]$

$\iff \Gamma \vdash A \leftrightarrow \bot$

$\iff \Gamma \vdash A \to \bot$

$\iff \Gamma \vdash \neg A$

Tiene top:

$$1 = [\top] = [\bot \to \bot] \qquad \Gamma \vdash A \to \top$$

$$[A] \leq [\top]$$

Observación: $A \in [\top] \iff \Gamma \vdash A \leftrightarrow \top$

$\iff \Gamma \vdash \top \to A$

$\iff \Gamma \vdash A$

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \bot \vdash \bot}\ \mathrm{Ax}}{\Gamma \vdash \bot \to \bot}\ \to I$$

¿Qué sería un complemento de $[A]$?

Sería una $[B]$ tq. $[A] \sqcap [B] = [\bot]$

$[A] \sqcup [B] = [\top]$

Es decir:

$A \wedge B \leftrightarrow \bot$

$A \vee B \leftrightarrow \top$

En lógica clásica, $B := \neg A$.

$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow \bot$

$(A \vee \neg A) \leftrightarrow \top$

En lógica intuicionista, "$\neg A$" no es el complemento de A.

Def. En un reticulado $(X, \leq, \sqcup, \sqcap)$, un elemento z es el complemento relativo de x con respecto a y si:

z es el elemento más grande tal que

$$x \sqcap z \leq y$$

se nota $z = (x \Rightarrow y)$

Es decir:

$$x \sqcap z \leq y$$
$$\wedge (\forall z' \in X)(x \sqcap z' \leq y \rightarrow z' \leq z).$$

Lema. El complemento relativo de x con respecto a y es único (si existe).

Dem. Sup. que z y z' son C.R.

Entonces $x \sqcap z \leq y$ $\qquad$ $x \sqcap z' \leq y$

$z' \leq z$ $\qquad$ $z \leq z'$

y $z = z'$.

En el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\Gamma$,

$$[A] \Rightarrow [B] = [A \rightarrow B]$$

Veamos que $[A] \sqcap [A \rightarrow B] \leq [B]$

$$\Gamma \vdash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Por otro lado, supongamos que

$$[A] \sqcap [C] \leqslant [B]$$

y veamos que $[C] \leqslant [A \to B]$.

Es decir, sabemos que $\Gamma \vdash (A \wedge C) \to B$

y veamos que $\Gamma \vdash C \to (A \to B)$.

Álgebras de Heyting

Def. Un álgebra de Heyting es

$$\mathcal{H} = (\underset{\substack{|\\ \text{Conjunto}\\ \text{arbitrario}}}{H}, \leqslant, \sqcup, \sqcap, 0, 1, \Rightarrow)$$

un reticulado distributivo con bottom, top y complementos relativos.

Lema.

1) El álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\Gamma$ es un álgebra de Heyting.

2) Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting, tomando $(x \Rightarrow y) := (-x \sqcup y)$.

3) Todo reticulado distributivo finito no vacío es un álgebra de Heyting.

Dem.

1) ✓

2) • $x \sqcap (x \Rightarrow y) \leqslant y$

$$\begin{aligned} x \sqcap (x \Rightarrow y) &\leqslant y \\ \| \\ x \sqcap (-x \sqcup y) \\ \| \\ \underbrace{(x \sqcap -x)}_{0} \sqcup (x \sqcap y) \\ \| \\ x \sqcap y \end{aligned}$$

✓

• Sea $z \in X$ otro elemento tq.

$$x \sqcap z \leq y$$

Entonces

$$\underbrace{(x \sqcap z) \sqcup -x}_{\begin{gathered} \| \\ \underbrace{(x \sqcup -x)}_{1} \sqcap (z \sqcup -x) \\ \| \\ z \sqcup -x \\ \geq \\ z \end{gathered}} \leq y \sqcup -x = -x \sqcup y = x \Rightarrow y$$

---

3) Todo reticulado distributivo finito no vacío es un álgebra de Heyting.

$$0 := x_1 \sqcap x_2 \sqcap \dots \sqcap x_n \qquad \text{donde } \{x_1, \dots, x_n\} \text{ son los elementos.}$$

$$1 := x_1 \sqcup x_2 \sqcup \dots \sqcup x_n$$

$$x \Rightarrow y := \bigsqcup \{z \mid x \sqcap z \leq y\}$$

Cumple con la propiedad que queremos:

1) $$x \sqcap \left(\bigsqcup \{z \mid x \sqcap z \leq y\} \right)$$

$$\underset{\text{distribuyendo}}{=} \bigsqcup \{x \sqcap z \mid x \sqcap z \leq y\} \leq y$$

2) Si z' es tal que $x \sqcap z' \leq y$.

En particular

$$z' \in \{z \mid x \sqcap z \leq y\}$$

y por lo tanto $z' \leq x \Rightarrow y$.

Lema. En un álgebra de Heyting valen:

1. $a \leq b \Rightarrow c$ es equivalente a $a \sqcap b \leq c$

2. $a \leq b$ es equivalente a $a \Rightarrow b = 1$

Dem. (pensar).

Def. Si $\mathcal{H} = \langle H, \leq, \sqcup, \sqcap, 0, 1, \Rightarrow \rangle$,
y una valuación
$$v : Var \longrightarrow H,$$
el valor de una fórmula $[\![A]\!]_v$ se define así:

$$[\![\alpha]\!]_v = v(\alpha)$$
$$[\![\bot]\!]_v = 0$$
$$[\![A \wedge B]\!]_v = [\![A]\!]_v \sqcap [\![B]\!]_v$$
$$[\![A \vee B]\!]_v = [\![A]\!]_v \sqcup [\![B]\!]_v$$
$$[\![A \to B]\!]_v = [\![A]\!]_v \Rightarrow [\![B]\!]_v$$

Notación.
- $\mathcal{H}, v \vDash A$ si $[\![A]\!]_v = 1$
- $\mathcal{H} \vDash A$ si $\forall v.\ \mathcal{H}, v \vDash A.$
- $\mathcal{H}, v \vDash \Gamma$ si $\forall A \in \Gamma.\ \mathcal{H}, v \vDash A.$
- $\mathcal{H} \vDash \Gamma$ si $\forall v.\ \mathcal{H}, v \vDash \Gamma.$
- $\Gamma \vDash A$ si $\forall \mathcal{H}\ \forall v.$ si $\mathcal{H}, v \vDash \Gamma$ entonces $\mathcal{H}, v \vDash A.$

Teorema Vale $\Gamma \vdash A$ en lógica intuicionista si y sólo si $\Gamma \vDash A$.

Teorema Vale $\Gamma \vdash A$ en lógica intuicionista si y sólo si $\Gamma \models A$.

Correctitud

Dem. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{H}$, sea v.

- Si $\Gamma = \{B_1, \dots, B_n\}$ $\quad [\![\Gamma]\!]_v := [\![B_1]\!]_v \sqcap \dots \sqcap [\![B_n]\!]_v$.

- Por inducción en la derivación de $\Gamma \vdash A$, veamos que $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![A]\!]_v$.

- Ejemplo.

1)
$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ Ax$$

$$[\![\Gamma, A]\!]_v = [\![\Gamma]\!]_v \sqcap [\![A]\!]_v \leq [\![A]\!]_v \checkmark$$

2)
$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge I$$

$[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![A]\!]_v$ y $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![B]\!]_v$

entonces

$$[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![A]\!]_v \sqcap [\![B]\!]_v .$$

3) ...

($\Leftarrow$) Completitud

Supongamos que $\Gamma \models A$.

En particular podemos elegir $\mathcal{L}_\Gamma$.

Y podemos elegir como valuación:

$$v : Var \longrightarrow \{ [A] \mid A \text{ fórmula} \}$$
$$v(\alpha) = [\alpha]$$

- Se puede ver que $[\![A]\!]_v = [A]$.

- Sabemos que

si $\mathcal{L}_\Gamma, v \models \Gamma$ — $\forall B \in \Gamma.\ [\![B]\!]_v = [\top]$

$[B] = [\top]$

$\Gamma \vdash B$

vale siempre

entonces

$\mathcal{L}_\Gamma, v \models A$.

$[A] = [\top]$

$\Gamma \vdash A$

Ej. de álgebra de Heyting

$\mathbb{R}$

$$(\{U \mid U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}\}, \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{R}, \Rightarrow)$$

$$A \Rightarrow B = (A^c \cup B)^\circ$$

$A = (0, +\infty)$ es abierto

$$[\![\alpha \vee \neg\alpha]\!]_v = A \cup (A^c)^\circ = (0,+\infty) \cup (-\infty, 0)$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$v(\alpha) = A$ $\qquad \neg\alpha = A \to \bot$ $\qquad \neq \mathbb{R}$