$$A ::= \alpha \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A \mid \bot$$

$$\neg A ::= A \to \bot \qquad \top ::= \bot \to \bot$$

Teorema de Glivenko

$\Gamma \vdash A$ vale en lógica clásica (NK) (proposicional).

si y sólo si

$\Gamma \vdash \neg\neg A$ vale en lógica intuicionista (NJ)

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B\end{matrix}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge I$$

$$\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\,\mathrm{LEM}$$

Dem. ($\Leftarrow$) si $\Gamma \vdash \neg\neg A$ vale en NJ

entonces $\Gamma \vdash \neg\neg A$ vale en NK.

Entonces $\Gamma \vdash A$ vale en NK.

($\Rightarrow$) Por inducción en la derivación del juicio $\Gamma \vdash A$ en NK,

veamos que $\Gamma \vdash \neg\neg A$ en NJ.

1) Ax.

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathrm{Ax}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \neg A}\,\mathrm{Ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot}\,\to E}{\Gamma, A \vdash \neg\neg A}\,\to I$$

2) $\wedge I$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \Gamma \vdash A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \Gamma \vdash B\end{matrix}}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge I$$

$$\dfrac{}{\Delta \vdash A}\,\mathrm{Ax} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash B}\,\mathrm{Ax}$$

Δ = $\Gamma, \neg(A \wedge B), A, B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\mathrm{HI}}{\Gamma, \neg(A\wedge B) \vdash \neg\neg A}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg B}\,\mathrm{HI}}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A \vdash \neg\neg B}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A, B \vdash \neg(A\wedge B)}\,\mathrm{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash A}\,\mathrm{Ax} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash B}\,\mathrm{Ax}}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge I}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A, B \vdash \bot}\,\to E}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A \vdash \neg B}\,\to I}{\Gamma, \neg(A\wedge B), A \vdash \bot}\,\to E}{\Gamma, \neg(A\wedge B) \vdash \neg A}\,\to I}{\dfrac{\Gamma, \neg(A\wedge B) \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg(A \wedge B)}\,\to I}\,\to E$$

3) $\boxed{\bot E}$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{HI}{\Gamma \vdash \neg\neg\bot}}{\Gamma, \neg A \vdash \neg\neg\bot}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A, \bot \vdash \bot}\,Ax}{\Gamma, \neg A \vdash \neg\bot}\,\to I}{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\to I}\,\to E$$

4)

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

(La habíamos hecho).

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}$$

⋮

En lógica de primer orden, no vale el teo. de Glivenko.

$$\alpha^N = \neg\neg\alpha$$
$$(A \wedge B)^N = A^N \wedge B^N$$
$$(A \vee B)^N = \neg\neg(A^N \vee B^N)$$
$$(A \to B)^N = A^N \to B^N$$
$$(\forall x. A)^N = \forall x. A^N$$
$$(\exists x. A)^N = \neg\neg\exists x. A^N$$

Traducción de doble negación de Gödel/Gentzen.

<u>teo.</u> $\Gamma \vdash A$ vale en NK de primer orden

si y sólo si

$\Gamma \vdash A^N$ vale en NJ de primer orden.

Semántica de Kripke

Importancia de la semántica:

1) Ver que la teoría tiene un modelo.

2) Dar un método para refutar una proposición.

- Uno podría enumerar teoremas (juicios $\boxed{\Gamma \vdash A}$ demostrables).

es recursivamente enumerable.

- Si uno tuviera una noción de modelo,
  podría enumerar posibles interpretaciones
  y si encuentra una donde $\Gamma \not\models A$,
  sabría que $\Gamma \nvdash A$.

<u>Teorema</u>. Si $\nvdash A$ en NJ proposicional,
existen un álgebra de Heyting y una valuación
$\mathcal{H}, v$
tq.
$\mathcal{H}, v \not\models A$. (Contramodelo)
Más aún, el contramodelo tiene cardinal a lo sumo

$$2^{2^{|A|}}$$

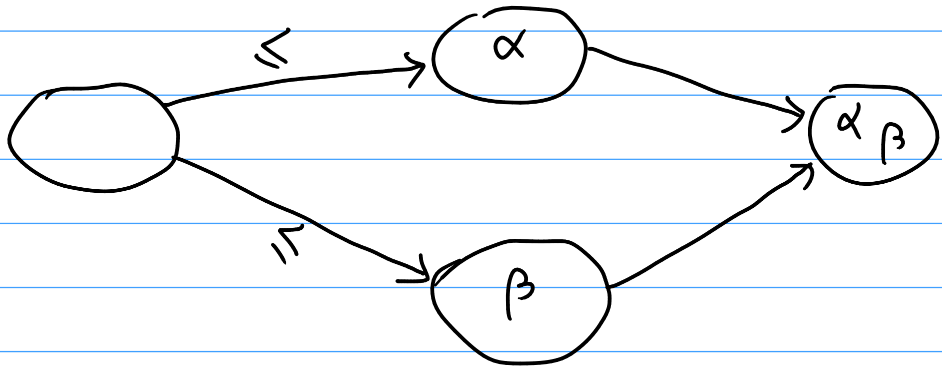
Def. Un modelo de Kripke es una tripla $\mathcal{M}=(W, \leq, V)$ donde

- W es un cjto. de elementos que se llaman "mundos"
- $\leq \subseteq W \times W$ es una relación de orden (refl, sym, trans).
- $V : W \longrightarrow \mathcal{P}(Var)$. $\quad V_w \subseteq Var$

Tal que cumple:

Monotonía. $\quad w \leq w' \implies V_w \subseteq V_{w'}$.

Ej.



Def. Si $\mathcal{M}$ es un modelo de Kripke, y w un mundo, definimos: "$\mathcal{M}, w \Vdash A$" así:

$$\mathcal{M}, w \Vdash \alpha \iff \alpha \in V_w$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B \iff \mathcal{M}, w \Vdash A \text{ y } \mathcal{M}, w \Vdash B$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B \iff \mathcal{M}, w \Vdash A \text{ ó } \mathcal{M}, w \Vdash B$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash A \to B \iff \forall w' \geq w.\ \text{Si } \mathcal{M}, w' \Vdash A \text{ entonces } \mathcal{M}, w' \Vdash B$$

$\mathcal{M}, w \Vdash \bot$ no vale en ningún mundo.

Lema (Monotonía generalizada). Si $w \leq w'$ y $\mathcal{M}, w \Vdash A$ entonces $\mathcal{M}, w' \Vdash A$.

Dem. Por ind. en A.

1) $\mathcal{M}, w \Vdash \alpha$ sii $\alpha \in V_w \subseteq V_{w'}$
por lo tanto
$\mathcal{M}, w' \Vdash \alpha$.

2) $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$ sii $\mathcal{M}, w \Vdash A$ y $\mathcal{M}, w \Vdash B$
Luego por HI $\mathcal{M}, w' \Vdash A$ y $\mathcal{M}, w' \Vdash B$
luego $\mathcal{M}, w' \Vdash A \wedge B$.

3) $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$ (parecido).

4) $\mathcal{M}, w \Vdash A \to B$ sii $\forall w'' \geq w$. si $\mathcal{M}, w'' \Vdash A$
entonces $\mathcal{M}, w'' \Vdash B$.

Entonces $\mathcal{M}, w' \Vdash A \to B$, porque si $w'' \geq w'$
también $w'' \geq w$.

5) $\mathcal{M}, w \Vdash \bot$ nunca vale.

"$\mathcal{M}, w \Vdash A$"

Notación.

- $\mathcal{M} \Vdash A$ sii $\forall w.\ \mathcal{M}, w \Vdash A.$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$ sii $\forall A \in \Gamma.\ \mathcal{M}, w \Vdash A.$
- $\Gamma \Vdash A$ sii $\forall \mathcal{M}\ \forall w.$ si $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$ entonces $\mathcal{M}, w \Vdash A.$

Teorema (Correctitud). Si $\Gamma \vdash A$ en NJ proposicional entonces $\Gamma \Vdash A$.

Dem. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de Kripke fijo, y veamos que si $\Gamma \vdash A$ entonces $\forall w (\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$ implica $\mathcal{M}, w \Vdash A)$, por inducción en la derivación de $\Gamma \vdash A$.

1) Ax. $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{Ax}$

Tenemos que ver que si $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma, A$ entonces $\mathcal{M}, w \Vdash A.$ ✓

2) $\wedge I$

$$\dfrac{\overset{\Pi}{\Gamma \vdash A} \qquad \overset{\Pi'}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Por HI sobre Π:
$(\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma \Longrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A)$

Por HI sobre Π':
$(\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma \Longrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash B).$

Dvq.
$(\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma \Longrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B).$

Sup. que $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma.$
Por h.i. vale $\mathcal{M}, w \Vdash A.$
Por h.i. vale $\mathcal{M}, w \Vdash B.$
Por lo tanto $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B.$

3)
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to I$$

Sup. que $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$.

Qvq. $\mathcal{M}, w \Vdash A \to B$.

Es decir

Qvq. $\forall w' \geq w.\ (\mathcal{M}, w' \Vdash A \Rightarrow \mathcal{M}, w' \Vdash B)$.

Sea $w' \geq w$.

Por monotonía, como $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$, también $\mathcal{M}, w' \Vdash \Gamma$.

Por lo tanto $\mathcal{M}, w' \Vdash \Gamma, A$.

Por HI $\mathcal{M}, w' \Vdash B$. ✓

4)
$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to E$$

Sup. que $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$.

Por HI $\mathcal{M}, w \Vdash A \to B$ es decir $\forall w' \geq w.\ (\mathcal{M}, w' \Vdash A \Rightarrow \mathcal{M}, w' \Vdash B)$.

Por HI $\mathcal{M}, w \Vdash A$.

En particular con $w' := w$ vale $(\mathcal{M}, w \Vdash A \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash B)$.

Luego vale

$$\mathcal{M}, w \Vdash B.$$

5)
$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot E$$

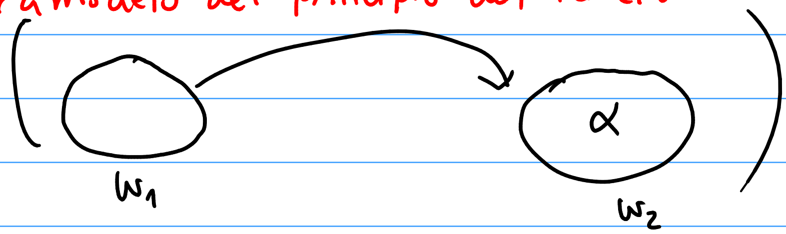
Sup. que $\mathcal{M}, w \Vdash \Gamma$.

Por HI $\mathcal{M}, w \Vdash \bot$.

Luego este caso es imposible.

6) (Más casos...).

Ejemplo. (Contramodelo del principio del tercero excluido).

$\mathcal{M} =$ 

$w_1 \leq w_2$

$V_{w_1} = \emptyset$

$V_{w_2} = \{\alpha\}$.

$\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \alpha \vee \neg\alpha$

- $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \alpha$ pues $\alpha \notin V_{w_1}$
- $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \neg\alpha$ pues $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \underbrace{\neg\alpha}_{\alpha \to \bot}$

significa que

$$\forall w' \geq w_1 .\ \mathcal{M}, w' \Vdash \alpha \Longrightarrow \mathcal{M}, w' \Vdash \bot$$

es decir $\forall w' \geq w_1 .\ \mathcal{M}, w' \not\Vdash \alpha$.

Pero $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \alpha$.

Completitud.

no necesariamente finito

Def. Un cjto. Γ de fórmulas es una teoría prima si:

1) Cerrado por deducción. Si $\Gamma \vdash A$ en NJ proposicional entonces $A \in \Gamma$.

2) Disyuntiva. Si $A \vee B \in \Gamma$ entonces $A \in \Gamma$ ó $B \in \Gamma$.

3) Consistente. $\Gamma \nvdash \bot$ (equivalentemente $\exists A .\ \Gamma \nvdash A$).

Lema (Saturación). Si $\Gamma \nvdash A$ entonces existe $\Gamma' \supseteq \Gamma$
tq. Γ' es una teoría prima
y $\Gamma' \nvdash A$.

Dem.

- Vamos a construir una sucesión
$$\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots$$
tal que $\forall k.\ \Gamma_k \nvdash A$.

- Sup. que Γ_k ya está construido y construyamos Γ_{k+1}:
  - Consideremos una enumeración de todas las fórmulas $A_1, A_2, A_3, \dots$
  - Elegimos una fórmula de la pinta $B \vee C$
    tal que $\Gamma_k \vdash B \vee C$
    y que no haya sido elegida en un paso anterior.

  Afirmo: O bien $\Gamma_k, B \nvdash A$ o bien $\Gamma_k, C \nvdash A$.

  Dem. Si $\Gamma_k, B \vdash A$ y $\Gamma_k, C \vdash A$
  tendríamos:
$$\dfrac{\Gamma_k \vdash B \vee C \qquad \Gamma_k, B \vdash A \qquad \Gamma_k, C \vdash A}{\Gamma_k \vdash A}\,EV$$
  Abs. (Sabíamos $\Gamma_k \nvdash A$).

  - Si $\Gamma_k, B \nvdash A$, tomamos $\Gamma_{k+1} := \Gamma_k, B$.
  - De lo contrario, tomamos $\Gamma_{k+1} := \Gamma_k, C$.

Ahora tomamos $\Gamma' := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k$.

Veamos que cumple con lo requerido:

1) $\Gamma' \nvdash A$, pues si $\Gamma' \vdash A$, tendríamos que $\Gamma_k \vdash A$ para algún k. (Imposible).

2) <u>Γ' es cerrada por deducción</u>.

- Sup. que $\Gamma' \vdash B$ y veamos que $B \in \Gamma'$.
- Como $\Gamma' \vdash B$ entonces $\Gamma_k \vdash B$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

  Entonces $\Gamma_k \vdash B \vee B$.

  Entonces en algún momento la construcción elige $B \vee B$. (En algún paso $j \in \mathbb{N}$).

$$\Gamma_{j+1} = \Gamma_j, B.$$

  Por lo tanto $B \in \Gamma'$.

3) <u>Γ' es disyuntiva</u>.

Sup. $\Gamma' \vdash B \vee C$ y veamos que $B \in \Gamma'$ ó $C \in \Gamma'$.

Entonces $\Gamma_k \vdash B \vee C$ para algún k.
Entonces la construcción elige $B \vee C$ en algún paso $j \in \mathbb{N}$.
Entonces

$$\Gamma_{j+1} := \begin{cases} \Gamma_j, B \\ \Gamma_j, C \end{cases}$$ con lo cual $B \in \Gamma'$ ó $C \in \Gamma'$.

4) Γ' es consistente.

Fácil, porque ya sabíamos que $\Gamma' \nVdash A$.

Luego $\Gamma' \nVdash \bot$.

//

Def. (Modelo de Kripke canónico).

$$\mathcal{M}_0 = (W_0, \subseteq, V)$$

$$W_0 = \{\Gamma \mid \Gamma \text{ es una teoría prima}\}.$$

$$V_\Gamma = \{\alpha \mid \underbrace{\Gamma \vdash \alpha}_{\alpha \in \Gamma}\}$$

Observación.

$\mathcal{M}_0$ es un modelo de Kripke.

es decir, vale la propiedad de monotonía:

$$\Gamma \subseteq \Gamma' \Rightarrow V_\Gamma \subseteq V_{\Gamma'}$$

Sí, porque si

$\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma' \vdash \alpha$.

Lema. (Main Semantic Lemma).

Si Γ es una teoría prima, para toda fórmula A.

$\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash A$ si y sólo si $A \in \Gamma$.

Dem. Por inducción en A.

1) $\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash \alpha \iff \alpha \in V_\Gamma \iff \Gamma \vdash \alpha \iff \alpha \in \Gamma$.

2) $\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash B \wedge C \iff \mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash B$ y $\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash C$

$\underset{\text{Por HI}}{\iff}$ $B \in \Gamma$ y $C \in \Gamma$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash B \wedge C}$

$\Downarrow \ \Uparrow$

$\iff B \wedge C \in \Gamma$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash B \wedge C}{\Gamma \vdash B} \quad \dfrac{\Gamma \vdash B \wedge C}{\Gamma \vdash C}$

3) $\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash B \vee C \iff \mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash B$ ó $\mathcal{M}, \Gamma \Vdash C$

$\underset{HI}{\iff}$ $B \in \Gamma$ ó $C \in \Gamma$

$\Downarrow$ $\Uparrow$ porque Γ es disyuntiva.

$\iff B \vee C \in \Gamma$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B \vee C} \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash B \vee C}$$

4) $\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash B \to C \iff \forall \underbrace{\Gamma'}_{\text{teoría prima}} \supseteq \Gamma.\ \mathcal{M}_0, \Gamma' \Vdash B \Rightarrow \mathcal{M}_0, \Gamma' \Vdash C$

$\underset{HI}{\iff}$ $\forall \Gamma' \supseteq \Gamma.\ B \in \Gamma' \Rightarrow C \in \Gamma'$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$\iff (B \to C) \in \Gamma$

($\Rightarrow$)

Qvq. $\Gamma \vdash B \to C$

Bvq. $\Gamma, B \vdash C$

Sup. que no valiera eso, es decir, $\Gamma, B \nvdash C$.

Por el lema de saturación $\exists \underbrace{\Gamma'}_{\text{Prima}} \supseteq \Gamma, B$. $\Gamma' \nvdash C$.

(Absurdo).

($\Leftarrow$) Sup. que $\Gamma \vdash B \to C$.

Si $\Gamma' \supseteq \Gamma$, también $\Gamma' \vdash B \to C$. Si además $\Gamma' \vdash B$

Por $\to E$ vale $\Gamma' \vdash C$. ✓

5) $\underbrace{\mathcal{M}_0, \Gamma \Vdash \bot}_{\text{No puede pasar nunca.}} \iff \underbrace{\bot \in \Gamma}_{\text{No puede pasar nunca, porque } \Gamma \text{ es consistente.}}$

Teorema (completitud).

Si $\Gamma \Vdash A$ entonces $\Gamma \vdash A$.

Dem. Por la contrarrecíproca.

Supongamos que $\Gamma \nvdash A$ y veamos que $\Gamma \nVdash A$.

Por el lema de saturación, $\exists \underbrace{\Gamma'}_{\text{teoría prima}} \supseteq \Gamma$ y $\Gamma' \nvdash A$.

Pero $\mathcal{M}_0, \Gamma' \Vdash \Gamma'$ $\quad \mathcal{M}_0, \Gamma' \nVdash A$.

$$\mathcal{M}_0, \Gamma' \Vdash A \iff A \in \Gamma'$$

(Por el Main Semantic Lemma).

//