Cálculo-λ simplemente tipado $(\to)$

Estilo à la Curry.

$\wedge, \vee, \bot, \top$

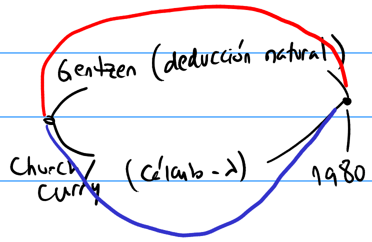
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

$A ::= \alpha \mid A \to A$

$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, x:A$

$x, y, z, \ldots$

$$\frac{}{\Gamma, x:A \vdash x:A}\ \mathrm{Ax} \qquad \frac{\Gamma, x:A \vdash t:B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}\ \to I$$



$$\frac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash ts : B}\ \to E$$

Ejemplos.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, x:A\to B\to C, y:A\to B \vdash \lambda z.xz(yz) : A \to C}}{\Gamma, x: A\to B\to C \vdash \lambda yz.xz(yz) : (A\to B)\to A\to C}}{\Gamma \vdash \lambda xyz.xz(yz) : (A\to B\to C)\to(A\to B)\to A\to C}\ \to I$$

t-lam

Obs. Un término no tiene por qué tener tipo único.

$\vdash \lambda x.x : A \to A$

$\vdash \lambda x.x : (A \to A) \to (A \to A)$

$\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha$

Pero todo término tiene un tipo principal.

$\forall t$ tq. $\vdash t : A$

$\exists A_0$ tq. $\vdash t : A_0$

$\forall A'$ tq. $\vdash t : A'$ $\quad A' = A_0\{\alpha_1 := B_1, \ldots, \alpha_n := B_n\}$

(La demostración de esto es el algoritmo de inferencia de tipos).

Estilo à la Church.

- Las variables vienen decoradas con un tipo.

$$\mathrm{Var} = \bigcup_{A \in \mathrm{Type}} \mathrm{Var}_A \qquad\qquad x^A \neq x^B$$

- No se necesita un contexto Γ explícito.

$$\frac{}{\vdash x^A : A} \qquad \frac{\vdash t : B}{\vdash \lambda x^A . t : A \to B} \qquad \frac{\vdash t : A \to B \quad \vdash s : A}{\vdash t s : B}$$

- En este sistema sí hay tipado único.

$x : A \vdash x : A$

Lema (Weakening). Si $\Gamma \vdash t : A$ y $\forall (x : B) \in \Gamma$, $\Delta(x) = B$. entonces $\Delta \vdash t : A$.

Dem.

Por ind. en la deriv. del juicio $\Gamma \vdash t : A$.

1) **Ax.**

$$\frac{}{\underbrace{\Gamma', x : A}_{\Gamma} \vdash x : A} \qquad \frac{}{\Delta \vdash x : A} \qquad \Delta = \Delta', x : A$$

$\Delta(x) = A$

2) $\to I$.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x . t : A \to B} \qquad \frac{\frac{HI}{\Delta, x : A \vdash t : B}}{\Delta \vdash \lambda x . t : A \to B} \to I$$

$\Delta, x : A$ extiende a $\Gamma, x : A$.

3) $\to E$.

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \to B \quad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash t s : B} \qquad \frac{\Delta \vdash t : A \to B \quad \Delta \vdash s : A}{\Delta \vdash t s : B} \to E$$

Lema (sustitución). Si $\Gamma, x:A \vdash t:B$ y $\Gamma \vdash s:A$ entonces

$$\Gamma \vdash t\{x:=s\} : B.$$

Dem.

Por ind. en la deriv. del juicio $\Gamma, x:A \vdash t:B$.

1) Ax.

$\Gamma, x:A \vdash y:B$

- Si $x=y$: $\Gamma, x:A \vdash x:A$ obs. $x\{x:=s\}=s$

  entonces $\Gamma \vdash s:A$ ✓

- Si $x \neq y$: $\Gamma, x:A \vdash y:B$ obs. $y\{x:=s\}=y$

  $\Gamma \vdash y:B$ ✓

2) $\to I$.

$\Gamma \vdash s:A$ y por Weakening $\Gamma, y:B \vdash s:A$

$$\frac{\Gamma, x:A, y:B \vdash u : C}{\Gamma, x:A \vdash \underbrace{\lambda y.u}_{t} : B \to C} \to I \qquad \frac{\dfrac{HI}{\Gamma, y:B \vdash u\{x:=s\} : C}}{\Gamma \vdash \underbrace{\lambda y.u\{x:=s\}}_{= t\{x:=s\}} : B \to C} \to I$$

3) $\to E$.

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash t_1 : B \to C \qquad \Gamma, x:A \vdash t_2 : B}{\Gamma, x:A \vdash \underbrace{t_1 t_2}_{t} : C} \to E \qquad \frac{\dfrac{HI}{\Gamma \vdash t_1\{x:=s\} : B \to C} \qquad \dfrac{HI}{\Gamma \vdash t_2\{x:=s\} : B}}{\Gamma \vdash \underbrace{t_1\{x:=s\}\, t_2\{x:=s\}}_{t\{x:=s\}} : C} \to E$$

Preservación de tipos.

Teorema (Subject Reduction).

Si $\Gamma \vdash t : A$ y $t \to_\beta s$

entonces

$$\Gamma \vdash s : A.$$

Dem. Por inducción en t.

1) Si $t = x$, no puede pasar $t \to_\beta s$. Vale trivialmente.

2) Si $t = \lambda x.u$, además como $t \to_\beta s$, $s = \lambda x.u'$ donde $u \to_\beta u'$.

$$\dfrac{\Gamma, x : B \vdash u : C}{\Gamma \vdash \underbrace{\lambda x.u}_{t} : \underbrace{B \to C}_{A}} \to I$$

Por h.i.

$$\dfrac{\Gamma, x : B \vdash u' : C}{\Gamma \vdash \underbrace{\lambda x.u'}_{s} : \underbrace{B \to C}_{A}} \to I$$

3) Si $t = t_1 t_2$. Este paso: $t_1 t_2 \to_\beta s$ se puede dar por tres razones.

3.1) Reducción en la raíz: $t_1 = \lambda x.t_1'$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, x : B \vdash t_1' : A}{\Gamma \vdash \lambda x.t_1' : B \to A} \to I \qquad \Gamma \vdash t_2 : B}{\Gamma \vdash \underbrace{(\lambda x.t_1')t_2}_{t = t_1 t_2} : A} \to E$$

Por Lema de Sustitución:

$$\Gamma \vdash \underbrace{t_1'\{x := t_2\}}_{s} : A \ \checkmark$$

3.2) Reducción interna a la función (lado izq. de la aplicación).

$t \to_\beta s \qquad t = t_1 t_2 \to_\beta t_1' t_2 = s \qquad t_1 \to_\beta t_1'$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t_1 : B \to A \qquad \Gamma \vdash t_2 : B}{\Gamma \vdash \underbrace{t_1 t_2}_{t} : A} \to E \qquad \dfrac{\dfrac{HI}{\Gamma \vdash t_1' : B \to A} \qquad \Gamma \vdash t_2 : B}{\Gamma \vdash \underbrace{t_1' t_2}_{s} : A} \to E$$

3.3) Reducción interna al argumento (similar).

Ojo: No vale Subject Expansion.

[Subject Expansion: $\Gamma \vdash s : A$ y $t \to_\beta s$ entonces $\Gamma \vdash t : A$]

Ejemplo.

$$\underbrace{(\lambda x . y)\, \Omega}_{\text{no tipable}} \xrightarrow[\beta]{} y$$

tipable bajo $y : \alpha$

$\Omega = (\lambda x . xx)(\lambda x . xx)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \beta \to \alpha} Ax \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \beta} Ax}{\Gamma \vdash xx : \alpha} \to E$$

$\Gamma(x) = (\beta \to \alpha) = \beta$

Absurdo.

Otra propiedad.

Lema del subtérmino. Si un término es tipable, sus subtérminos también lo son.

Terminación.

- En C-λ no tipado, hay términos que no terminan.

$$\Omega \to \Omega \to \dots$$

- Un término t es weakly normalizing (WN) si existe una secuencia de pasos $t = t_0 \to t_1 \to \dots \to t_n$

t_n f.n.

$\nexists\, t_{n+1} .\ t_n \to t_{n+1}$.

$\Uparrow \quad \not\Downarrow$

- Un término t es strongly normalizing (SN) si no existe una secuencia de pasos $t = t_0 \to t_1 \to \dots \to t_n \to \dots$.

Fact: Si un término es tipable en STLC, $\Gamma \vdash t : A$ entonces t es SN.

Veamos primero que t es WN.

Orden de multiconjuntos:

- $M \overset{+}{\cup} N$ es la unión aditiva de multicj tos.

Por ejemplo: $\{1,1,2,3,3,3\} \overset{+}{\cup} \{1,1,3\} = \{1,1,1,1,2,3,3,3,3\}$

- Definimos una relación de orden entre multiconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$M \overset{+}{\cup} \{n\} >^1 M \overset{+}{\cup} \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$$

siempre que $m_1, m_2, \dots, m_k < n$.

- $>$ es la clausura transitiva de $>^1$.

Ej. $\{1,2,3\} > \{1,2,1,1,2,2\} > \{1,1,1,1,1,1,2,2\} > \dots$

Zohar Manna

Lema. La relación de orden $>$ entre multicjtos. es bien fundada.
O sea,
no existe una sucesión infinita
$$M_1 > M_2 > M_3 > \dots$$
König

Def.

- Grado de un tipo: $\delta : Type \to \mathbb{N}$
$$\delta(\alpha) = 0$$
$$\delta(A \to B) = 1 + \max\{\delta(A), \delta(B)\}.$$

- Medida de un término:
$$\# : Term \to Multiset(\mathbb{N}).$$
$$\#(x) = \emptyset$$
$$\#(\lambda x.t) = \#(t)$$
$$\#(t_1 t_2) = \#(t_1) \overset{+}{\cup} \#(t_2) \overset{+}{\cup} \begin{cases} \{\delta(A \to B)\} & \text{si } t_1 = \lambda x^A . p^B \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$$

- **Afirmación:** Dado un término t,
si $t \to s$ que resulta de contraer
el redex de t de grado máximo
y, de entre ellos, el de más a la derecha,
entonces
$$\#(t) > \#(s).$$

- Con esta afirmación ya tenemos WN.
La reducción no podría ser infinita
$$t = t_0 \to t_1 \to t_2 \to \dots \to t_n \to \dots$$
Porque tendríamos:
$$\#(t_0) > \#(t_1) > \#(t_2) > \dots > \#(t_n)$$

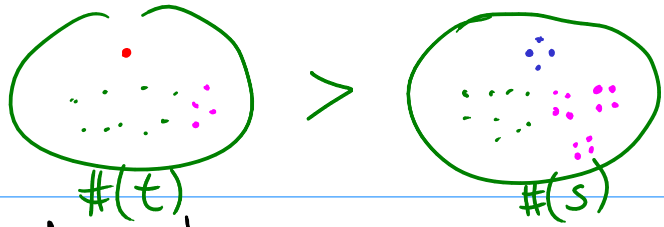
Ejemplo.

$$\underbrace{(\lambda f^{A\to A}.\, \underbrace{f(fx)}_{A})}_{(A\to A)\to A}\, I^{A\to A} \longrightarrow I^{A\to A}(I^{A\to A}x)$$

$$\#$$

$$\{\delta((A\to A)\to A)\} \qquad \{\delta(A\to A), \delta(A\to A)\}$$

$$\{2\} > \{1, 1\}$$



Lema. Dado un término t,
si $t \to s$ que resulta de contraer el redex de t de grado máximo y, de entre ellos, el de más a la derecha, entonces

$$\#(t) > \#(s).$$

• = redex contraído

• = redexes que se duplican

• = redexes que se crean

MANERAS DE CREACIÓN:

(III) $(\lambda x^{(A\to B)\to C}. \dots x s \dots)(\lambda y^{A}. t^{B})$ $\qquad \delta((A\to B)\to C)$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \vee$$

$\dots \underline{(\lambda y^{A}. t^{B}) s} \dots$ $\qquad \delta(A\to B)$

(I) $(\lambda x^{A}. \lambda y^{B}. t^{C})\, s^{A}\, u^{B} \longrightarrow \underline{(\lambda y^{B}. t'^{C})\, u}$

$$\delta(A\to(B\to C)) > \delta(B\to C)$$

(II) $\underbrace{(\lambda x^{A\to B}. x^{A\to B})(\lambda y^{A}. t^{B})}\, s^{A} \longrightarrow \underline{(\lambda y^{A}. t^{B})\, s^{A}}$

$$\delta((A\to B)\to A\to B) > \delta(A\to B)$$

"$M < n$" $\iff \forall m \in M.\ m < n$

Lema. Si $\Gamma, x{:}A \vdash t : B$ y $\Gamma \vdash s : A$
y $\#(t) < n$
$\#(s) < n$
entonces $\#(t\{x:=s\}) < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$.

Dem. Ind. en la deriv. del juicio $\Gamma, x{:}A \vdash t : B$.

1) $\underline{Ax}$, $t = x$: $\Gamma, x{:}A \vdash x : A$

$\#(t\{x:=s\}) = \#(s) < n \leqslant \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$ ✓

2) $\underline{Ax}$, $t = y$: $\Gamma, x{:}A \vdash y : B$
$y \neq x$

$\#(t\{x:=s\}) = \#(y) = \emptyset < n$

3) $\underline{\to I}$,
$$\frac{\Gamma, x{:}A, y{:}B \vdash u : C}{\Gamma, x{:}A \vdash \lambda y.u : B \to C} \to I$$

$\#(u) = \#(\lambda y.u) < n$
hipótesis

Por h.i. $\#(u\{x:=s\}) < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$
$\|$
$\#(\lambda y.u\{x:=s\})$ ✓

4) $\underline{\to E}$,
$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash t_1 : B \to C \qquad \Gamma, x{:}A \vdash t_2 : B}{\Gamma, x{:}A \vdash t_1 t_2 : C} \to E$$

Por hipótesis: $\#(t_1 t_2) < n$
$\cap\!\!| \quad \cap\!\!|$
$\#(t_1) \quad \#(t_2)$.

Por h.i. $\#(t_1\{x:=s\}) < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$ ⊛
$\#(t_2\{x:=s\}) < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$. ⊛

Qvq.

$$\#(t_1\{x:=s\}\, t_2\{x:=s\}) < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$$

$$\| $$

$$\underbrace{\#(t_1\{x:=s\})}_{\circledast} \overset{+}{\cup} \underbrace{\#(t_2\{x:=s\})}_{\circledast} \overset{+}{\cup} \begin{cases} \{\delta(A'\to B')\} & \text{si } t_1\{x:=s\} \; \lambda x^{A''}.\rho^{B'} \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$$

- Si $t_1\{x:=s\} = \underbrace{\lambda y^{A'}.\rho^{B'}}_{A\to B}$, Qvq. $\delta(A'\to B') < \text{má}\{n, 1+\delta(A)\}$.

Consideramos dos casos:

4.1) si $t_1 = \lambda y^{A'}.q^{B'}$, entonces

$$\#(t) < n \quad \text{Por hipótesis}$$
$$\|$$
$$\#(t_1 t_2)$$
$$\|$$
$$\#((\lambda y^{A'}.q^{B'})t_2) \supseteq \{\delta(A'\to B')\}$$

✓

4.2) si $t_1 = x^{A'\to B'}$ y $S = \lambda y^{A'}.\rho^{B'}$.

En tal caso

$$\Gamma \vdash s : A$$

$$\overset{: A'\to B'}{\delta(A'\to B')} = \delta(A)$$

Por lo tanto $\underset{\delta(A)}{\overset{\|}{\delta(A'\to B')}} < \text{máx}\{n, 1+\delta(A)\}$

✓