SN del cálculo-λ simplemente tipado.

$N ::= \lambda x_1 \ldots x_n . y\, N_1 \ldots N_m$

1) Consistencia.

$\vdash t : \underbrace{\alpha}_{\text{tipo base}}$ Por terminación $t \twoheadrightarrow s \in NF$.

Por SN $\vdash s : \alpha$

$\| $

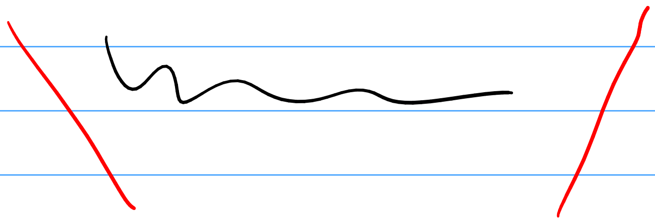
$\lambda x_1 \ldots x_n . y\, N_1 \ldots N_m$

$n > 0$.

Entonces $\vdash s : A \to B \neq \alpha$.

2) Complejidad de proof search (Propiedad de la subfórmula).

Si $\Gamma \vdash t_0 : A$ $\exists t$ tq.



$\Gamma \vdash t : A$

Todas las fórmulas que aparecen en las subderivaciones son subfórmulas de A o de fórmulas de Γ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A, y : B \vdash x : A}}{x : A \vdash \lambda y . x : B \to A}}{\vdash \lambda x y . x : A \to B \to A}$$

$$\dfrac{\Gamma, x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t_1 : B_1 \quad \ldots \quad \Gamma, x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t_n : B_n}{\Gamma \vdash \lambda \overset{A_1}{x_1} \ldots \overset{A_n}{x_n} . \overset{B_1 \to \ldots \to B_m \to C}{y}\, \overset{B_1}{t_1} \ldots \overset{B_m}{t_m} : \underbrace{A}_{A_1 \to \ldots \to A_n \to C}}$$

$\Gamma \vdash ? : A$

PSPACE

Increasing Functionals (de Vrijer, '87) $A ::= \alpha \mid A \to A$

Idea: Interpretar los términos del C-λ tipado como funciones crecientes.

Para cada tipo A, definimos un cjto IF_A y un orden $<_A \subseteq IF_A \times IF_A$.

$$IF_\alpha = \mathbb{N} \qquad <_\alpha = <_{\mathbb{N}}$$

$$IF_{(A\to B)} = \{ f : IF_A \to IF_B \mid \underbrace{f \text{ es creciente}}_{\substack{\forall a,b \in IF_A.\ \text{si } a <_A b \\ \text{entonces } f(a) <_B f(b).}} \}$$

$$\left(f <_{(A\to B)} g \right) \iff \forall a \in IF_A.\ f(a) <_B g(a)$$

Def. Si $n \in \mathbb{N}$, dado $f \in IF_A$ definimos $f +_A n \in IF_A$.

$$m +_\alpha n := m + n$$

$$f +_{(A\to B)} n := \lambda a \in IF_A .\ f(a) +_B n$$

Lema. 1) $f +_A n \in IF_A$.

2) Si $f <_A g$ entonces $(f +_A n) <_A (g +_A n)$.

Dem. Por ind. en A.

(α) 1) $m +_\alpha n \in IF_\alpha = \mathbb{N}$ ✓

2) Si $m <_\alpha m'$ entonces $(m+n) < (m'+n)$. ✓

$(A \to B)$ 1) $f +_{A \to B} n \in IF_{A \to B}$

Qvq. si $a <_A a'$

$$(f +_{A\to B} n)(a) < (f +_{A\to B} n)(a')$$
$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad \shortparallel$$
$$f(a) +_B n \qquad\qquad f(a') +_B n$$

Como $f \in IF_{A \to B}$, $f(a) <_B f(a')$.
Por el ítem 2 de la HI, concluímos.

2) Sup. que $f <_{A\to B} g$. Qvq. $f + n <_{A \to B} g + n$.

Qvq. $\forall a \in IF_A$. $(f +_{A\to B} n)(a) <_B (g +_{A \to B} n)(a)$
$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad \shortparallel$$
$$f(a) +_B n \qquad\qquad g(a) +_B n$$

Como $f <_{A\to B} g$, $f(a) <_B g(a)$.
Por ítem 2 de la HI, concluímos.

Lema. $f \in IF_A$, $f +_A 0 = f$.

Lema. Si $n < m$ entonces $f +_A n <_A f +_A m$.

Dem. Por ind. en A.

(α) $k + n < k + m$ ✓

$(A \to B)$ $f +_{A\to B} n <_{A\to B} f +_{A\to B} m$

Es decir $\forall a \in IF_A$.

$$f(a) +_B n <_B f(a) +_B m$$

Vale por HI.

$f \in IF_A$.

Lema. $0 < n \Rightarrow f <_A f+n$

Dem. Ind. en A.

(α) $m < m+n$ ✓

$(A \to B)$ $f <_{A\to B} f+n$

es decir $\forall a \in IF_A$. $f(a) <_B f(a)+n$ ✓ por HI.

Def. Por ind. en A definimos:

$0_A \in IF_A$ — Para cada $a \in IF_A$, $a^*_A \in \mathbb{N}$.

$0_\alpha := 0 \in \mathbb{N}$ — $n^*_\alpha := n$

$0_{A\to B} := \lambda a \in IF_A .\ 0_B +_B \underbrace{a^*_A}_{\in \mathbb{N}}$ — $f^*_{A\to B} := \underbrace{f(0_A)}_{IF_B}{}^*_B$

Lema. 1) Si $f <_A g$ entonces $\underbrace{f^*_A}_{\in \mathbb{N}} < g^*_A$.

2) $0_A \in IF_A$

Dem. Ind. en A.

(α) $n < m$ — $n^* = n < m = m^*$.

$(A \to B)$ Sup. $f <_{A\to B} g$.

$$f^*_{A\to B} = f(0_A)^*_B$$
$$\wedge$$
$$g^*_{A\to B} = g(0_A)^*_B \quad ✓$$

$f<g$, $f(\underbrace{0_A}_{\in IF_A}) < g(0_A)$, por HI.

Queremos evaluar los términos del c-λ simplemente tipado.

(1) si $\vdash t : A$ entonces $[\![t]\!] \in IF_A$.

(2) si $t \to_\beta s$ entonces $[\![t]\!] >_A [\![s]\!]$.

Obs. $>_A$ es bien fundado. (No existe una cadena infinita $a_1 >_A a_2 >_A a_3 >_A \dots$).

Dem.

Sup. $a_1 >_A a_2 >_A a_3 >_A \dots$.

Por el lema anterior:

$$a_1{}^*_A > a_2{}^*_A > a_3{}^*_A > \dots \quad \text{(Absurdo)}.$$

Comentario.

Si $\vdash t : A$ entonces $[\![t]\!] \in IF_A$.

¿Qué pasaría si $\Gamma \neq \emptyset$?

$x : A \vdash x : A$ $\qquad [\![x]\!]_\rho$

ρ es una asignación que a cada variable le da un valor.

Def. Decimos que ρ es compatible con $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)$ si

$$\rho(x_i) \in IF_{A_i} \qquad \forall i \in 1..n$$

Def. • Si $\Gamma \vdash t : A$, y ρ es compatible con Γ,

definimos $[\![t]\!]_\rho \in IF_A$ así:

$$[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \quad \in IF_A$$

$$[\![t\,s]\!]_\rho = \underbrace{[\![t]\!]_\rho}_{IF_{A\to B}}\left([\![s]\!]_\rho\right) \qquad \frac{\Gamma, x:A \vdash t:B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}$$

$$[\![\lambda x^A.t^B]\!]_\rho = \underbrace{\lambda a \in IF_A.\ \underbrace{[\![t]\!]_{\rho[x\mapsto a]}}_{\in IF_B} +_B a^*_A +_B 1}_{IF_{A\to B}}$$

Ej.

• $[\![\lambda x^\alpha. x^\alpha]\!] = \lambda n \in \mathbb{N}.\ [\![x]\!]_{[x\mapsto n]} + n + 1$

$= \lambda n \in \mathbb{N}.\ 2n+1$

• $[\![\lambda x^\alpha. x^\alpha]\!]^* = (\lambda n \in \mathbb{N}.\ 2n+1)(0)^* = 1$

• $[\![\lambda x^{\alpha\to\alpha}.\ \lambda y^\alpha.\ x(xy)]\!] =$

$= \lambda f \in \mathbb{N}\to\mathbb{N}.\ [\![\lambda y^\alpha. x(xy)]\!]_{[x\mapsto f]} +_{\alpha\to\alpha} f^*_{\alpha\to\alpha} +_{\alpha\to\alpha} 1$

$= \lambda f \in \mathbb{N}\to\mathbb{N}.\left(\lambda n \in \mathbb{N}.\ [\![x(xy)]\!]_{[x\mapsto f,\, y\mapsto n]} + n + 1\right)$

$+_{\alpha\to\alpha} f^*_{\alpha\to\alpha} +_{\alpha\to\alpha} 1$

$= \lambda f \in \mathbb{N}\to\mathbb{N}.\lambda n \in \mathbb{N}.\ f(f(n)) + n + f(0) + 2$

• $[\![\lambda x^{\alpha\to\alpha}. \lambda y^{\alpha}. x(xy)]\!]^*_{(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha}$

$= 0_{\alpha\to\alpha}(0_{\alpha\to\alpha}(0)) + 0 + 0_{\alpha\to\alpha}(0) + 2 = 2$

Lema.

1) si $x \notin fv(t)$ entonces $[\![t]\!]_\rho = [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c]}$

$x : C$
$c \in IF_C$.

2) $\forall t, s$. $[\![t\{x:=s\}]\!]_\rho = [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto [\![s]\!]_\rho]}$

Dem.

1) Por ind. en t.

Var. $(y \neq x)$ $[\![y]\!]_\rho = \rho(y) = (\rho[x\mapsto c])(y) = [\![y]\!]_{\rho[x\mapsto c]}$.

App. $[\![t s]\!]_\rho = [\![t]\!]_\rho([\![s]\!]_\rho)$

$\underset{HI}{=} [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c]}([\![s]\!]_{\rho[x\mapsto c]}) = [\![t s]\!]_{\rho[x\mapsto c]}$.

Lam. $[\![\lambda y^{A}. t^{B}]\!]_\rho = \lambda a \in IF_A. [\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a]} + a^*_A + 1$

$\underset{HI}{=} \lambda a \in IF_A. [\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a][x\mapsto c]} + a^*_A + 1$

$= [\![\lambda y. t]\!]_{\rho[x\mapsto c]}$.

2) $\forall t, s.\quad [\![t\{x:=s\}]\!]_\rho = [\![t]\!]_{\rho[x \mapsto [\![s]\!]_\rho]}$

Dem. Ind. en t.

- Var. $t = x$. $\quad [\![s]\!]_\rho = [\![x]\!]_{\rho[x \mapsto [\![s]\!]_\rho]}$

  $t = y \neq x$. $\quad [\![y]\!]_\rho = \rho(y) = \left(\rho[x \mapsto [\![s]\!]_\rho]\right)(y) =$

  $= [\![y]\!]_{\rho[x \mapsto c]}$.

- App. Por HI.

- Lam. Por HI.

Lema. 1) $[\![t]\!]_\rho \in IF_A \qquad (\Gamma \vdash t : A)$

2) Si $x \in fv(t)$ y $c \leq_C c'$ $\qquad x : C$, $c, c' \in IF_C$.

$[\![t]\!]_{\rho[x:=c]} \leq_A [\![t]\!]_{\rho[x:=c']}$.

Dem. Ind. en t.

- Var. 1) $[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \in IF_A$

  2) Como $x \in fv(t)$, $t = x$.

  $[\![x]\!]_{\rho[x:=c]} = c < c' = [\![x]\!]_{\rho[x:=c']}$.

- App. 1) $\underbrace{[\![t^{A\to B} s^A]\!]_\rho}_{} = \underbrace{[\![t]\!]_\rho}_{\in IF_{A\to B}} \big(\underbrace{[\![s]\!]_\rho}_{\in IF_A} \big) \in IF_B$.

  Por HI

  Qvq: $\in IF_B$

2) Sup. $x \in fv(t\,s)$.

- Si $x \in fv(t) \cap fv(s)$:

$$\begin{aligned}
[\![t\,s]\!]_{\rho[x\mapsto c]} &= [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c]}\left([\![s]\!]_{\rho[x\mapsto c]}\right)\\
&< [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c']}\left([\![s]\!]_{\rho[x\mapsto c]}\right)\\
&< [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c']}\left([\![s]\!]_{\rho[x\mapsto c']}\right)\\
&= [\![t\,s]\!]_{\rho[x\mapsto c']}
\end{aligned}$$

Por HI

- Si $x \in fv(t) \setminus fv(s)$:

$<$

$=$

- Si $x \in fv(s) \setminus fv(t)$:

$=$

$<$

Lam.

1) $[\![\lambda y^A.t^B]\!]_\rho$ Qvq. $\in \mathcal{IF}_{A\to B}$

$$\| $$

$$\lambda a \in \mathcal{IF}_A.\ \underbrace{[\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a]}}_{\text{Por HI. } \in \mathcal{IF}_B} +_B a^*_A +_B 1$$

Veamos que es creciente.

Sean $a <_A a'$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&[\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a]} +_B a^*_A +_B 1\\
&< [\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a']} +_B a^*_A +_B 1 \qquad \text{Por HI}\\
&< [\![t]\!]_{\rho[y\mapsto a']} +_B (a')^*_A +_B 1
\end{aligned}$$

Qvq.

2) $[\![\lambda y.t]\!]_{\rho[x\mapsto c]} <_{A\to B} [\![\lambda y.t]\!]_{\rho[x\mapsto c']}$ si $c<c'$

Como $x \in fv(\lambda y.t)$, también $x \in fv(t)$.

$$[\![\lambda y.t]\!]_{\rho[x\mapsto c]} = \lambda a \in \mathcal{IF}_A.\ [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c][y\mapsto a]} + a^*_A + 1$$

$$< \lambda a \in \mathcal{IF}_A.\ [\![t]\!]_{\rho[x\mapsto c'][y\mapsto a]} + a^*_A + 1$$

$$= [\![\lambda y.t]\!]_{\rho[x\mapsto c']}.$$

Prop. Si $t \xrightarrow[\beta\eta]{} s$ y $\Gamma \vdash t : A$
entonces

$$[\![t]\!]_\rho >_A [\![s]\!]_\rho \qquad (\text{para cualquier asignación } \rho).$$

Dem. Por ind. en t.

- **Var** $t = x$. Trivial.
- **App.** $t = u\,r \longrightarrow s$.
  - Hay tres subcasos:

App. 1: Reducción en la raíz.

$$t = (\lambda x.u')\,r \longrightarrow u'\{x := r\} = s$$

$$[\![(\lambda \overset{A}{x}.\overset{B}{u'})\overset{A}{r}]\!]_\rho = [\![\lambda x.u']\!]_\rho\left([\![r]\!]_\rho\right)$$

$$= [\![u']\!]_{\rho[x\mapsto [\![r]\!]_\rho]} +_B \left([\![r]\!]_\rho\right)^*_A +_B 1$$

$$> [\![u']\!]_{\rho[x\mapsto [\![r]\!]_\rho]}$$

$$= [\![u'\{x:=r\}]\!]_\rho$$

App. 2. Reducción a la izq.

$$\frac{u \to u'}{ur \to u'r}$$

Por h.i. $[\![u]\!]_\rho > [\![u']\!]_\rho$.

$$[\![ur]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho ([\![r]\!]_\rho)$$
$$> [\![u']\!]_\rho ([\![r]\!]_\rho) = [\![u'r]\!]_\rho$$

App. 3. Reducción a la der. (Similar)

Lam.

$$\frac{u \longrightarrow u'}{\lambda x.u \to \lambda x.u'}$$

Por h.i. $[\![u]\!]_\rho > [\![u']\!]_\rho$.

$$[\![\lambda x^A.u^B]\!]_\rho = \lambda a \in \mathcal{IF}_A . [\![u]\!]_{\rho[x \mapsto a]} +_B a^*_A + 1$$
$$> \lambda a \in \mathcal{IF}_A . [\![u']\!]_{\rho[x \mapsto a]} +_B a^*_A + 1$$
$$= [\![\lambda x.u']\!]_\rho$$

Pues para todo $a \in \mathcal{IF}_A$:

$$[\![u]\!]_{\rho[x \mapsto a]} +_B a^*_A + 1 > [\![u']\!]_{\rho[x \mapsto a]} +_B a^*_A + 1$$

//

Teorema. El C-λ simplemente tipado es SN.

(Consecuencia de lo anterior).

$$\lambda x.t\,x \xrightarrow[\eta]{} t \qquad \text{con } x \notin fv(t)$$

$$[\![\lambda x.t\,x]\!]_\rho > [\![t]\!]_\rho$$